





~~24 - 11 - 34~~

22260

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio  Palchetto

Num.° d'ordine 34

~~22 - 11~~



B-11 C

11.

518



COURS ÉLÉMENTAIRE
D'ANALYSE.



IMPRIMERIE DE MADAME VEUVE ROUCHARD-HUZARD,
5, rue de l'Épée.



610038

COURS ÉLÉMENTAIRE D'ANALYSE

CONTENANT

UN TRÈS-GRAND NOMBRE D'APPLICATIONS

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE NAVALE
ET DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES ;

PAR

J. MEUNIER-JOANNET,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR D'HYDROGRAPHIE,
CHARGÉ DU COURS D'ANALYSE À L'ÉCOLE NAVALE IMPÉRIALE



PARIS

ARTHUS BERTRAND, ÉDITEUR

LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE,
rue Hautefeuille, 21.



88000



A MONSIEUR

J. GUÉRARD,

ancien examinateur pour la sortie de l'école navale.

Mon cher professeur,

En vous offrant ce livre, écrit sous l'inspiration des savantes et intéressantes leçons que j'ai reçues de vous, je donne au public des armes contre moi.

Sachant qui vous êtes, le public va se montrer sévère pour l'élève d'un tel Maître.

Veillez me croire, mon cher professeur, avec respect et reconnaissance,

Votre élève bien dévoué,

M. J. JOANNET.

L'intelligence de ce livre ne comporte que la connaissance des premières notions de mathématiques : les *éléments de Géométrie* ; l'*Algèbre* bornée au calcul des quatre premières opérations et à la discussion des équations du premier et du deuxième degré ; et l'étude de la *Trigonométrie dite rectiligne*.

Les nombreux exercices que renferme ce livre , à la suite de chaque théorie, sont purement analytiques.

L'auteur s'est abstenu de chercher ses applications dans le domaine de la mécanique, afin de conserver l'harmonie qui existe entre les *ÉLÉMENTS DE MÉCANIQUE RATIONNELLE* que publie son camarade M. *Savias*, et ce *Cours d'analyse*, écrit pour ceux qui ne demandent à la théorie que l'instrument de la pratique.



TABLEAU DES FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE.

$$\sin a = \frac{1}{2} \text{ corde } 2a.$$

$$\sin 0^\circ = 0 = \cos 90^\circ.$$

$$\sin 18^\circ = \frac{1}{4} (\sqrt{5} - 1) = \cos 72^\circ.$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ.$$

$$\sin 36^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = \cos 54^\circ.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \cos 45^\circ.$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} = \cos 30^\circ.$$

$$\sin 90^\circ = 1 = \cos 0^\circ.$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1.$$

$$\operatorname{Tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 a}.$$

$$\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}.$$

$$\sin a = \frac{\operatorname{Tg} a}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 a}}.$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 a}}.$$

$$\sin (\pi - a) = \sin a.$$

$$\cos (\pi - a) = -\cos a.$$

$$\operatorname{Tg} (\pi - a) = -\operatorname{Tg} a.$$

$$\sin (-a) = -\sin a.$$

$$\cos (-a) = \cos a.$$

$$\operatorname{Tg} (-a) = -\operatorname{Tg} a.$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

$$\operatorname{Tg}(a+b) = \frac{\operatorname{Tg} a + \operatorname{Tg} b}{1 - \operatorname{Tg} a \cdot \operatorname{Tg} b}.$$

$$\operatorname{Tg}(a-b) = \frac{\operatorname{Tg} a - \operatorname{Tg} b}{1 + \operatorname{Tg} a \cdot \operatorname{Tg} b}.$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a.$$

$$\operatorname{Tg} 2a = \frac{2 \operatorname{Tg} a}{1 - \operatorname{Tg}^2 a}.$$

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a.$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a.$$

$$\operatorname{Tg} 3a = \frac{3 \operatorname{Tg} a - \operatorname{Tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{Tg}^2 a}.$$

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}.$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right).$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \cos \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \sin \left(\frac{p-q}{2} \right).$$

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\operatorname{Tg} \left(\frac{p+q}{2} \right)}{\operatorname{Tg} \left(\frac{p-q}{2} \right)}.$$

xj

$$\sin a < a < \operatorname{Tg} a.$$

$$\lim \frac{a}{\sin a} = 1 \text{ (lorsque } a \text{ tend vers zéro).}$$

Si un arc est suffisamment petit, on peut le prendre pour son sinus, et prendre 1 pour son cosinus.

$$\operatorname{Tg} a + \sqrt{1 + \operatorname{Tg}^2 a} = \operatorname{Tg} \left(45^\circ + \frac{a}{2} \right).$$

Formules pour la résolution des triangles rectilignes rectangles
(a est l'hypoténuse) :

$$b = a \cdot \sin B.$$

$$b = a \cdot \cos C.$$

$$b = c \cdot \operatorname{Tg} B.$$

Formules pour la résolution des triangles rectilignes obliques.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$

Expression d'un arc.

a étant le nombre de secondes contenues dans un arc, cet arc est représenté par a'' ou bien si l'on remplace l'arc $1''$ par $\sin 1''$ (ce que l'on peut faire en raison de la petitesse de l'arc $1''$) on écrira :

$$a \cdot \sin 1''.$$

Valeur d'un arc a , en fonction de l'angle au centre correspondant A et du rayon R de cet arc.

$$a = A.R.$$

Dans cette formule : il faut considérer l'angle au centre A , comme mesuré par l'arc décrit de son sommet comme centre, avec l'unité de longueur pour rayon.



TABLE - AIDE - MÉMOIRE.

INTRODUCTION.

1.

Complément de géométrie.

	<u>Pages.</u>
La section obtenue par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe d'un cône droit est limitée dans tous les sens. — Cette courbe est le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante (ellipse).	1
La ligne qui joint les foyers et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette ligne sont les deux axes de l'ellipse.	3
Le point-milieu de la ligne qui joint les foyers est le centre de l'ellipse.	3
La ligne qui joint les foyers est la ligne la plus grande que l'on puisse mener par le centre de l'ellipse.	4
Expression de la distance du centre à l'un des foyers de l'ellipse $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	4
Construction de l'ellipse au moyen de ses axes.	5
Définition de la tangente à une courbe.	6
La tangente en un point de l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.	6
Les tangentes aux extrémités des axes de l'ellipse sont perpendiculaires à ces axes.	7
<u>Problème.</u> — Mener par un point une tangente à l'ellipse (deux solutions, si ce point est hors de la courbe; une seule, si le point est sur la courbe).	8
<u>Problème.</u> — Parallèlement à une droite donnée, mener une tangente à l'ellipse (deux solutions).	10
Section du cône droit par un plan parallèle à l'une des généra-	

	<u>Pages.</u>
trices du cône.— Cette section est le lieu des points équidistants d'une droite et d'un point fixe. — On la nomme <i>parabole</i>	10
La parabole peut être considérée comme une ellipse dont le centre et l'un des foyers sont situés à l'infini.	11
Construction de la parabole par points, connaissant son foyer et sa directrice.	12
La tangente à la parabole, fait des angles égaux avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe, menés par le point de contact.	13
<i>Problème.</i> — Mener par un point donné, une tangente à la parabole (deux solutions, si le point est hors de la courbe; une seule, si le point est sur la courbe).	13
<i>Problème.</i> — Parallèlement à une droite donnée, mener une tangente à la parabole (une seule solution, toujours possible, excepté le cas où la direction donnée est parallèle à l'axe).	13
La sous-normale en un point de la parabole est constante et égale à la distance du foyer à la directrice.	15
Section du cône droit, par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe.— Cette section est le lieu des points, dont la différence des distances à deux points fixes est constante.	16

II.

Complément d'algèbre.

Formule du binôme de Newton

$$(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \dots a^m. \quad 17$$

Loi de formation du développement précédent. 19

Les coefficients des termes du binôme vont en croissant jusqu'au terme du milieu. 19

Application de la formule du binôme.

Calcul du nombre e .

$$\frac{1}{1}$$

$e = \lim (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ lorsque α tend vers zéro.

Quand on dit que α tend vers zéro, il faut entendre que α prend la valeur que l'on obtient par la pensée, en passant de l'état zéro au premier nombre.— Il faut concevoir que α soit le passage de ce qui n'est pas, à ce qui est infiniment petit.

$$= 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} \dots = 2,71828. \quad 20$$

Le nombre e est compris entre 2 et 3. 22

	<u>Pages.</u>
Le nombre e est incommensurable.	<u>22</u>
Recherche de la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.	
$s_n = \frac{(l+r)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{1.2} r \cdot s_{m-1} - \frac{(m-1)m}{1.2.3} r^2 s_{m-2} \dots$	24
Application à la suite naturelle des nombres.	
$s_1 = \frac{n(n+1)}{1.2}, s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}, s_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = s_1^2 \dots$	25
Sommation des piles de boulets.	
Pile triangulaire. $P_{\triangle} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \dots$	25
Pile quadrangulaire. $P_{\square} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} \dots$	26
Pile rectangulaire. $P_{\square} = \frac{n(n+1)(2n+3p+1)}{1.2.3} \dots$	26
<u>Dans cette dernière formule : n est le nombre de boulets contenus dans le plus petit côté de la base et p désigne le nombre — 1, de boulets contenus dans la pile horizontale que forme l'arête.</u>	
	27

III.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Détermination d'un point sur une ligne droite.	28
Détermination d'un point sur un plan par le moyen de ses coordonnées rectilignes.	28
Divers systèmes de coordonnées.	29
Équation d'une ligne. (Relation constante qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne.).	30
<u>Problème. — Une ligne étant définie trouver son équation.</u>	
Équation de l'ellipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$	30
Équation de la parabole $y^2 = 2px$	31
Équation de l'hyperbole $a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$	31
<u>Problème. — L'équation d'une ligne étant donnée, construire cette ligne.</u>	
<u>Construction des courbes données par les équations :</u>	
$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$	33
$y^2 = 2px$	35
$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$	36
$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 8x + 12}$	36
$y = \sin x$	39

$$y = \frac{\sin x}{x} \dots\dots\dots 39$$

$$y = a^x \dots\dots\dots 40$$

$$\text{Équation polaire de l'ellipse.} \dots r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad e < 1. \dots 40$$

$$\text{Équation polaire de la parabole.} \dots r = \frac{p}{1 - \cos \theta} \dots\dots\dots 41$$

$$\text{Équation polaire de l'hyperbole.} \dots r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad e > 1. \dots 42$$

Transformation des coordonnées. — Formules :

$$\text{Changement d'origine} \quad x = a + X, \quad y = b + Y. \dots\dots\dots 42$$

Passage d'un système d'axes obliques à un autre système d'axes obliques (sans changer d'origine).

$$\begin{aligned} x &= \frac{X \sin (\theta - \alpha) + Y \sin (\theta - \alpha')}{\sin \theta} \\ y &= \frac{X \sin \alpha + Y \sin \alpha'}{\sin \theta} \dots\dots\dots 43 \end{aligned}$$

Passage d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires :

$$\begin{aligned} x &= \frac{X \sin (\theta - \alpha) - Y \cos (\theta - \alpha)}{\sin \theta} \\ y &= \frac{X \sin \alpha + Y \cos \alpha}{\sin \theta} \dots\dots\dots 44 \end{aligned}$$

Passage d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques :

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha + Y \cos \alpha' \\ y &= X \sin \alpha + Y \sin \alpha' \dots\dots\dots 45 \end{aligned}$$

Passage d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires :

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha \dots\dots\dots 45 \end{aligned}$$

Généralités. \dots\dots\dots 45

Distance de deux points en coordonnées rectilignes.

$$\begin{aligned} d^2 &= (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + 2(x'' - x')(y'' - y') \cos \theta. \\ \theta &\text{ étant l'angle des axes.} \dots\dots\dots 47 \end{aligned}$$

Équations du cercle

$$\begin{aligned} (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + 2(x - \alpha)(y - \beta) \cos \theta &= R^2 \\ (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 &= R^2 \\ x^2 + y^2 &= R^2 \end{aligned}$$

α, β sont les coordonnées du centre ; R est le rayon. \dots\dots\dots 48

Étude de la ligne droite.

Toute équation du premier degré à deux variables représente une ligne droite.	48
Réciproquement toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré à deux variables.	50
<i>Remarque.</i> — $y = ax + b$ étant l'équation d'une droite, α l'inclinaison de cette droite sur l'axe des x et θ l'angle des axes, on a :	
$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}$; $\sin \theta = 90^\circ$ $a = \text{Tg } \alpha$	51
Équation d'une droite en fonction de ses coordonnées à l'origine :	
$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$	52
Angle d'une droite avec l'axe des x :	
$\text{Tg } \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}$	52
Équation d'une droite qui passe par un point donné x', y' :	
$y - y' = a (x - x')$.	
a y est indéterminé.	53
Équation d'une droite qui passe par deux points donnés $x', y'; x'', y''$:	
$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$	54
Point d'intersection de deux droites.	54
Angle de deux droites : .	
$\text{Tg } V = \frac{(a - a') \sin \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta}$.	
si $\theta = 90^\circ$ $\text{Tg } V = \frac{a - a'}{1 + aa'}$	55
Conditions de parallélisme de deux droites $y = ax + b$, $y = a'x + b'$:	
$a = a'$	56
Conditions de perpendicularité :	
$1 + (a + a') + aa' \cos \theta$. . . axes obliques.	
$1 + aa' = 0$. . . axes rectangles.	56
Distance d'un point x', y' à une droite $y = ax + b$:	
$d = \frac{(y' - ax' - b) \sin \theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}$. . . axes obliques.	
$d = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$. . . axes rectangles.	57
Exercices sur la ligne droite.	57

De quelques propriétés de l'ellipse.

Construction de l'ellipse par points, connaissant ses axes. (Trois procédés.). 58

Équation de la normale en un point x', y' de l'ellipse :

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x'). \quad 60$$

Équation de la tangente en un point x', y' de l'ellipse :

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \\ \text{ou} \quad a^2 y' y + b^2 x' x = a^2 b^2. \quad 61$$

Relation $Tg \, t. \, Tg \, \varepsilon = \frac{a}{b}. \quad 63$

Relation $Tg \, t. \, Tg \, \omega = \frac{a^2}{b^2}. \quad 64$

Calcul d'un rayon R de l'ellipse :

$$R = a \cdot \sqrt{1 - e^2 \sin^2 t - e^4 \sin^4 t - e^6 \sin^6 t}.$$

Dans cette formule : a est le demi-grand axe de la courbe, e est

le rapport $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ et t est l'angle, que la normale à l'extré-

mité du rayon, fait avec le grand axe. 65

ÉLÉMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Dérivée et différentielle.

La limite du rapport de l'accroissement d'une fonction, à l'accroissement correspondant de la variable, est une quantité généralement finie et déterminée. 67

La limite de ce rapport est appelée la dérivée de la fonction; cette dérivée représente géométriquement : la tangente de l'angle α que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x 68

Loi de formation de la dérivée d'une fonction entière

$$f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + \dots \quad f'(x) = mAx^{m-1} + (m-1)Bx^{m-2} + \dots \quad 69$$

La dérivée d'une constante est nulle. 69

Théorème I. — Suivant que la dérivée d'une fonction est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante. 70

Théorème II. — Lorsque pour une valeur finie de la variable, une fonction est finie et a une dérivée finie, la fonction est continue. 71

$$d \sqrt[m]{u} = \frac{du}{m \sqrt[m]{u^{m-1}}} \dots d \sqrt{u} = \frac{du}{2 \sqrt{u}} \dots \dots \dots 84$$

Différentielle d'un quotient.

$$d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \dots \dots \dots 85$$

*Différentiation des fonctions transcendantes.*Différentielle de $\text{Log } x$.

$$d \text{Log } u = \frac{du}{u}, \text{Log } e \dots \quad d \log u = \frac{du}{u} \dots \dots \dots 86$$

Différentielle de a^u (u étant variable).

$$da^u = a^u \log a \cdot du \dots \dots \dots 87$$

Différentielle de u^v (u et v étant variables).

$$\dots \dots \dots 88$$

Différentielle de $\sin u$.

$$d \sin u = \cos u \cdot du \dots \dots \dots 88$$

Différentielle de $\cos u$.

$$d \cos u = -\sin u \cdot du \dots \dots \dots 89$$

Différentielle de $\text{Tg } u$.

$$d \text{Tg } u = \frac{du}{\cos^2 u} \dots \dots \dots 89$$

Différentiation des fonctions circulaires.

$$d \text{arc sin } u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \dots \dots \dots 90$$

$$d \text{arc cos } u = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \dots \dots \dots 90$$

$$d \text{arc Tg } u = \frac{du}{1+u^2} \dots \dots \dots 91$$

Exemples de différentiation. 93

Différentielle d'une fonction de plusieurs fonctions de la variable indépendante

$$df(u, v, w \dots) = \frac{df}{du} \cdot du + \frac{df}{dv} \cdot dv + \frac{df}{dw} \cdot dw \dots$$

Règle : considérez chaque fonction comme seule variable, les autres comme constantes; différenciez dans chaque cas et suitez la somme de toutes les différentielles ainsi obtenues. 98

Exemples de différentiation. 100Différentiation des fonctions implicites. 102

Différentielles des ordres supérieurs, des fonctions explicites d'une seule variable.

Si x est variable indépendante, dx est constant. En effet, si l'on donne à la variable indépendante un accroissement Δx , Δx sera un nombre arbitraire et variable; la limite de Δx ou dx sera donc en quelque sorte le premier nombre que l'on obtiendra par la pensée, si l'on imagine la suite que forment les nombres en partant de zéro et en croissant par degrés infiniment petits. dx est donc un nombre que l'on peut considérer comme constant.

103

Exemples de différentiations successives. 106

Série de Taylor.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n} f^n(x) \dots 110$$

Série de Mac-Laurin.

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} f^n(0) \dots 112$$

Série de Taylor à deux variables :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) = f(x, y) + hf'_x(x, y) + Mk^2 \\ + k.f'_y(x, y) + Pk^3 \\ + Qkh \dots 113 \end{aligned}$$

Applications des séries de Taylor et de Mac-Laurin.

Développement de $\text{Log}(x+h)$.

$$\text{Log}(x+h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \dots \right) \dots 113$$

Série au moyen de laquelle on calcule les logarithmes des nombres :

$$\begin{aligned} \text{Log}(n+1) = \text{Log } n + 2 \text{Log } e \cdot \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right] \dots 114 \end{aligned}$$

Développements de $\log(1+x)$, $\log(1-x)$. 115

Expressions du sinus et du cosinus d'un arc, en fonction des exponentielles imaginaires :

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \dots 115$$

Développement en série de l'expression :

$$x = a - u \sin 2a + \frac{u^2}{2} \sin 4a - \frac{u^3}{3} \sin 6a + \text{etc.} \dots$$

dans cette formule $u = \frac{1-m}{1+}$ 117

Développement de $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$
 119

Développement de $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$
 120

Développement de e^x et de a^x 121

Étude des séries

Caractère de convergence d'une série. 122

Théorème I. — Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent indéfiniment, la série est convergente et le premier terme négligé représente l'approximation. 123

Lorsque les termes d'une série sont tous positifs, il ne suffit pas qu'ils décroissent indéfiniment pour que la série soit convergente. 124

Théorème II. — Lorsque dans une série, à partir d'un certain terme, le rapport d'un terme au précédent a une limite déterminée inférieure à l'unité, cette série est convergente; elle est divergente si cette limite est plus grande que l'unité. 126

Erreur commise en s'arrêtant à un terme. 126

Théorème III. — On peut toujours prendre n assez grand, quel que soit x , de telle sorte que l'expression $\frac{x^n}{1.2.3\dots n}$ devienne moindre que toute quantité donnée. 127

Théorème IV. — Si la série à termes positifs

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$$

est convergente et si $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ sont des nombres constants assujettis à ne pas dépasser un maximum A , la série $A_0 t_0 + A_1 t_1 + A_2 t_2 + \dots$ est convergente. 127

Théorème. — Si dans le développement de $f(x+h)$, on fait $x = a$, et si pour cette valeur, toutes les dérivées successives ont des valeurs finies, on pourra toujours donner à h une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque du développement soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent. 129

Des expressions fractionnaires qui pour certaine hypothèse de-
viennent $\frac{0}{0}$.

Règle. Si $f(a) = 0$, $F(a) = 0$. $\lim \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$ 130

Exemples. 132

Des expressions fractionnaires qui deviennent $\frac{\infty}{\infty}$ pour une cer-
taine hypothèse de la variable. 135

Conditions de maximum ou de minimum d'une fonction $f(x)$.

Conditions de maximum $\begin{cases} f'(x) = 0. \\ f''(x) < 0. \end{cases}$

Conditions de minimum $\begin{cases} f'(x) = 0. \\ f''(x) > 0. \end{cases}$ 137

Applications. 138

Différentielle de l'arc d'une courbe plane :

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, $ds = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{ds^2}} dt$ 142

Différentielle de l'aire d'une courbe plane :

$dA = y dx$, $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ 144

De la courbure et du rayon de courbure.

Si l'on considère deux éléments rectilignes consécutifs d'une courbe située dans le voisinage d'un point; l'inclinaison du second élément sur le premier, est la déviation de ce second élément par rapport au premier, c'est la courbure de la courbe au point considéré.

La courbure d'une courbe en un point est donc mesurée par l'angle que font entre eux deux éléments consécutifs pris dans le voisinage du point; or ces éléments prolongés sont la tangente au point de la courbe et la tangente infiniment voisine; par suite α étant l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x , la courbure est représentée par l'angle $d\alpha$.

Et si l'on convient de rapporter l'angle $d\alpha$ à l'arc ds que sous-tendent ces deux éléments consécutifs, on dira que la courbure de la courbe est mesurée par le rapport $\frac{d\alpha}{ds}$.

La courbure du cercle est constante et égale à l'inverse du rayon. 145

Cercle de courbure en un point d'une courbe quelconque. 146

Calcul du rayon de courbure d'une courbe dont l'équation est donnée :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ } x \text{ est variable indépendante.}$$

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y \, dx - dy \, d^2x}, \text{ } x \text{ est variable dépendante.} \quad 147$$

Du centre de courbure. — Il est dans la concavité de la courbe.. 149

Rayon de courbure d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires :

$$R = \frac{\left(r + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2r}{d\theta^2}} \quad 149$$

De l'interpolation.

Définition et formation des différences successives des termes d'une suite. 150

Problème. — Connaissant le premier terme d'une suite et les différences successives de ce terme, calculer un terme quelconque de la suite. 151

But de l'interpolation. — Formule d'interpolation :

$$u_x = u_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h} \cdot \left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \\ + \frac{\frac{x-x_0}{h} \cdot \left(\frac{x-x_0}{h} - 1\right) \cdot \left(\frac{x-x_0}{h} - 2\right)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \text{etc.}$$

ou limite cette suite, en y supposant nulles la différence d'un certain ordre et les différences suivantes. 153

Application numérique. 154

Représentation graphique d'une fonction. 155

Notions générales sur la construction des racines réelles des équations de forme quelconque à une inconnue. 157

Courbe des erreurs. 159

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL.

	Pages.
Définition de l'intégrale d'une fonction.	161
<i>Théorème.</i> — Une fonction quelconque a toujours une intégrale.	
— Représentation graphique d'une intégrale.	161

Principes élémentaires :

$$\int A u dx = A \int u dx,$$

$$\int (u dx + v dx + w dx) = \int u dx + \int v dx + \int w dx,$$

$$\int u dx = \int u d(x - a). \quad 162$$

De l'intégrale définie.

Si $F(x)$ est la fonction dont la différentielle est $f(x) dx$ et si dans $F(x)$ on donne à x deux valeurs particulières a et b ; la différence $F(b) - F(a)$ est dite l'*intégrale définie* de $f(x) dx$. Cette

intégrale définie se représente par la notation $\int_a^b f(x) dx$ 163

Le renversement des limites change le signe de l'intégrale définie. — 163

Les nombres c, d, e, f étant écrits par ordre de grandeur et étant compris entre a et b on a :

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^d + \int_d^e + \int_e^f + \int_f^b \quad 164$$

Intégrales fondamentales déduites de la différentiation

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \text{ quel que soit } m.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C \quad \text{ou} \quad \frac{\text{Log } x}{\text{Log } e} + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{Tg } x + C, \quad \int \text{Tg } x \cdot \sec x dx = \sec x + C. \quad . . . 165$$

Remarque sur l'intégrale $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$.

Cette intégrale donne :

$$\int \sqrt[m]{x} . dx = \frac{x^{\frac{1}{m} + 1}}{\frac{1}{m} + 1} + C, \quad \int \frac{dx}{x^m} = \int x^{-m} dx = \frac{x^{1-m}}{1-m} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}} + C. \dots \dots 165$$

Remarque sur l'intégrale $\int \frac{dx}{x} = \log x + C. \dots \dots 166$

Méthode d'intégration par parties :

$$vdu = uv - \int u dv. \dots \dots 167$$

D'un principe facile et commode, au moyen duquel on peut généralement déterminer, presque sans artifices de calcul, les intégrales simples. 168

Calcul des intégrales de quelques fonctions trigonométriques. 168

Du calcul de quelques intégrales.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \dots \dots 174$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right). \dots \dots 176$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right) + C. \dots \dots 177$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \frac{1}{a} \log (ax + \sqrt{a^2 x^2 - 1}). \dots \dots 178$$

$$\int x \sqrt{x-x^2} dx = \frac{8x^2-2x-3}{24} \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{16} \arcsin (2x-1) + C. \dots \dots 179$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \arccos \left(\frac{a-2x}{a} \right) + C. \dots \dots 180$$

Intégrer l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = n^2 y.$

$$y = A. e^{nx} + B. e^{-nx} \dots \dots 183$$

Intégrer l'équation

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx. \dots \dots 185$$

Méthode d'intégration par séries. 187

Développement de $\arctan x$ en série. 188

Développement de $\arcsin x$ en série et calcul du nombre π 189

Applications diverses.

	Pages.
Tangente à une courbe algébrique.	191
Expression de la sous-tangente $ST = \frac{y dx}{dy}$	191
Longueur de la tangente $T = \frac{y}{dx} \cdot \sqrt{dx^2 + dy^2}$	192
Expression de la sous-normale $SN = \frac{y \cdot dy}{dx}$	192
Longueur de la normale $N = \frac{y}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2}$	193
Tangente à une courbe polaire. — La tangente à une courbe rapportée à des coordonnées polaires est déterminée par l'angle V, qu'elle fait avec le rayon vecteur du point de contact	
$Tg V = \frac{r \cdot d\theta}{dr}$	193
Sous-tangente et sous-normale d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires	
$ST = r^2 \frac{d\theta}{dr}$, $SN = \frac{dr}{d\theta}$	194
Longueurs de la tangente et de la normale	
$T = r \sqrt{1 + r^2 \frac{d\theta^2}{dr^2}}$, $N = \sqrt{r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}}$	195
Applications :	
Spirale d'Archimède.	195
Spirale logarithmique.	195

Concavité et convexité des courbes.

Une courbe $y = f(x)$ est convexe ou concave vers l'axe des x , suivant que $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ou de signes contraires.	
Aux points d'inflexion on a $f''(x) = 0$, ou $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.	
Aux points maximum ou minimum on a $f'(x) = 0$ ou $\frac{dy}{dx} = 0$.	196

Applications des théories précédentes.

I. Construire le lieu de l'équation $y^2 = x^3 + x^4$	199
II. Construire le lieu de l'équation $y^2 - 2x^2y + x^4 - x^3 = 0$	204
III. Déterminer le lieu des points tels, que le produit de leurs	

distances à deux points fixes, soit constant et égal au carré de la moitié de la ligne qui joint ces deux points fixes.	209
IV. Construire le lieu de l'équation : $r = a \sin \frac{\theta}{2}$	212

Des trois courbes représentées par l'équation générale du deuxième degré à deux variables.

L'équation générale $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$ du 2 ^e degré, suivant que l'on a : $b^2 - 4ac < 0$; $b^2 - 4ac > 0$ ou $b^2 - 4ac = 0$, représente : une courbe limitée dans tous les sens ; illimitée dans tous les sens, à deux branches infinies ; ou une courbe limitée dans un sens, illimitée dans l'autre, et se composant d'une seule branche infinie.	214
Construction de courbes du 2 ^e degré.	219

Simplification de l'équation générale du 2^e degré à deux variables.

Disparition des termes du 1 ^{er} degré en x et en y . — Cette disparition n'a lieu que pour les courbes des caractères $b^2 - 4ac < 0$ et $b^2 - 4ac > 0$	
Loi de formation des équations de la nouvelle origine. $f(x, y)$ étant l'équation générale du 2 ^e degré, les coordonnées de la nouvelle origine, pour laquelle l'équation est rapportée à des axes parallèles aux premiers, sont données par les équations : $\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$	233
La nouvelle origine est le centre de la courbe.	233
Calcul du coefficient numérique que présente l'équation de la courbe lorsqu'on l'a rapportée à de nouveaux axes parallèles aux premiers.	235
Disparition du terme en y et du terme indépendant des variables, dans l'équation générale du 2 ^e degré alors que $b^2 - 4ac = 0$	236
Disparition du terme contenant le rectangle xy des variables.	237
Les nouveaux axes sont des diamètres conjugués de la courbe.	238
Les courbes du 2 ^e degré, dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac < 0$, sont des ellipses.	240
Les courbes du 2 ^e degré, dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac > 0$, sont des hyperboles.	241
Disparition du terme contenant le rectangle des variables, dans l'équation générale du 2 ^e degré alors que $b^2 - 4ac = 0$	
Avec ce terme disparaît en même temps le terme en x^2	242
Les courbes du 2 ^e degré, dont le caractère analytique est	

	Pages.
$b^2 - 4ac = 0$, sont des paraboles.	243
Disparition des termes en x^2 et en y^2 .	
Cette disparition n'a lieu que pour l'hyperbole.. . . .	244
Applications numériques sur la réduction de l'équation générale du 2 ^e degré.	245

Théorie des asymptotes.

Asymptotes des courbes quelconques.	254
Asymptotes des courbes algébriques.	257
L'asymptote peut être considérée comme une tangente dont le point de contact est situé à l'infini.	259
Asymptotes aux courbes rapportées à des coordonnées polaires.	264

De quelques courbes sur lesquelles on applique les théories précédentes.

I. Construire le lieu de l'équation $y^3 + x^3 - 3a \cdot xy = 0$	265
II. Construire le lieu de l'équation $y^4 - 96 \cdot a^2 y^2 + 100 \cdot a^2 x^2 - x^4 = 0$	271
III. Construire le lieu de l'équation $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$	274
IV. Construire le lieu de l'équation $r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}$	278
V. Construire le lieu de l'équation $r = \frac{a \cdot \cos 2 \theta}{\sin \theta}$	283

Du centre des courbes.

Lorsqu'on transporte, parallèlement à eux-mêmes, les axes coordonnés au centre d'une courbe, la nouvelle équation de la courbe ne change pas alors qu'on y remplace x par $-x$ et y par $-y$	287
Si une courbe a plus d'un centre, elle en a une infinité tous situés en ligne droite.	
Les courbes algébriques ne peuvent avoir plus d'un centre.	
Dans une courbe algébrique de degré impair, le centre est sur la courbe.	288

Des diamètres d'une courbe.

Recherche des diamètres d'une courbe quelconque.	290
Des diamètres des courbes du 2 ^e degré.	
$f(x, y) = 0$ étant l'équation générale du 2 ^e degré à deux variables, et m étant la direction des cordes parallèles qu'un dia-	

mètre divise en parties égales, l'équation de ce diamètre est

$$m. \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx} = 0.$$

Les diamètres des courbes du 2^e degré sont des lignes droites et passent tous par le centre.

La tangente à l'extrémité d'un diamètre d'une courbe du 2^e degré, est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en parties égales. 290

Dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles. 291

Des diamètres conjugués dans les courbes du 2^e degré. 291

Des axes dans les courbes du 2^e degré. 292

Contact des courbes planes.

Définition des infiniment petits de divers ordres. 292

Théorie des contacts.

Deux courbes ont en un point un contact de l'ordre n , lorsqu'en ce point la différence de leurs ordonnées est un infiniment petit de l'ordre $n+1$.

Il résulte de cette définition que si $y = f(x)$ et $y = F(x)$, sont les équations de deux courbes, ces deux courbes auront un contact de l'ordre n en un point, si pour l'abscisse de ce point on a :

$$F(x) = f(x); F'(x) = f'(x); F''(x) = f''(x); \dots F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x). \quad 294$$

Lorsque l'équation d'une courbe contient $n+1$ constantes indéterminées, on peut l'assujettir par les $n+1$ équations précédentes, à avoir avec une courbe donnée un contact de l'ordre n . 295

Droite osculatrice. — Elle a un contact du 1^{er} ordre avec une courbe. C'est la tangente à cette courbe. 296

Cercle osculateur. — C'est le cercle qui avec une courbe, a un contact du 2^e ordre.

Les coordonnées α et ζ de son centre sont données par les équations

$$\zeta = y + \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad \alpha = x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

son rayon R a pour valeur :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Dans ces équations les rapports $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ sont tirés de l'équation de la courbe, avec laquelle le cercle a un contact du 2^e ordre. 296

Propriétés du cercle osculateur :

- I. Le centre du cercle osculateur en un point d'une courbe, est sur la normale de ce point.
- II. Le centre du cercle osculateur est dans la concavité de la courbe.
- III. Le cercle de courbure et le cercle osculateur sont identiques. 298

Équation de la développée d'une courbe.

La développée est le lieu des centres des cercles osculateurs de la courbe. 299

Propriétés de la développée :

- I. Le rayon de courbure en un point d'une courbe est tangent à la développée de cette courbe.
- II. Un arc de développée est égal à la différence des rayons de courbure des extrémités de cet arc.

Rayon de courbure et équation de la développée de l'ellipse :

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \quad b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}} \quad 303$$

Rayon de courbure et équation de la développée de l'hyperbole :

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} \quad b^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \cdot c^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{4}{3}} \quad 304$$

Rayon de courbure et équation de la développée de la parabole :

$$R = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2} \quad c^2 = \frac{8}{27 \cdot p} (x - p)^3 \quad 305$$

De quelques quadratures.

Aire du cercle. $\pi \cdot R^2$ 307

Aire de la parabole. $\frac{2}{3} xy$ 308

Aire de l'ellipse. πab 308

Aire de l'hyperbole.

Rapportée à ses asymptotes $\frac{m^2}{\text{Log } e} \cdot \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right)$ 310

Rapportée à ses axes $\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left(\frac{x^2}{a^2} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right)$. 312

	Pages.
Aire de la spirale logarithmique $\frac{r'^2 - r^2}{4m}$	313
Aire de la spirale d'Archimède $\frac{1}{6} a^2 \theta^3$	313
Aire de la courbe logarithmique $m \left[x'' \log \left(\frac{x''}{e} \right) - x' \log \left(\frac{x'}{e} \right) \right]$	314
Différentielle de l'aire Σ d'une surface de révolution. $d\Sigma = 2\pi \cdot yds$	314
Application. — Surface de l'ellipsoïde de révolution.	314
Volume de l'ellipsoïde de révolution.	316
Expression d'un arc d'ellipse, dont les points extrêmes sont déterminés par les angles que les normales en ces points, font avec le grand axe.	317

Étude de la cycloïde.

Génération de la cycloïde.

Équation de la courbe.

$x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$	319
Tangente à la cycloïde.	320
Expression de la normale.	322
Le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale.	322
La développée de la cycloïde est une cycloïde.	323
Aire de la cycloïde.	323
Longueur de l'arc de cycloïde.	326
Surface de révolution engendrée par la cycloïde.	327
Volume de révolution engendré par la cycloïde.	328

De la chaînette.

Équation de la chaînette $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$	328
Construction de la courbe.	330
Dans la chaînette le rayon de courbure est inversement proportionnel au carré du cosinus de l'inclinaison de la tangente.	331

DE QUELQUES QUESTIONS DANS LESQUELLES ON EST CENDUIT
A DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

	Pages.
I. Trouver une courbe dans laquelle la normale passe par un même point fixe.	332
II. Trouver une courbe dans laquelle la normale soit constante.	333
III. Trouver une fonction qui soit à elle-même sa dérivée.	334
IV. Trouver une courbe dans laquelle la sous-normale et la sous-tangente soient toujours dans le rapport de la puissance $m^{ième}$ de l'ordonnée à la puissance $n^{ième}$ de l'abscisse.	334
V. Trouver une courbe telle que la sous-normale y soit constante.	336
VI. Trouver une courbe telle que la sous-tangente y soit double de l'abscisse.	337
VII. Trouver une courbe telle que le segment de surface compté à partir de l'origine et compris entre la courbe, l'axe des x et une ordonnée, soit égal au logarithme de l'abscisse.	337
VIII. Trouver une courbe telle que la sous-normale soit proportionnelle à l'abscisse.	338
IX. Trouver une courbe telle que la portion de tangente comprise entre deux droites fixes données, soit toujours divisée en deux parties égales par le point de contact.	339
X. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit constant.	340
XI. Trouver une courbe telle que, en un point quelconque, la somme de la sous-tangente et de la sous-normale soit constante et égale à une longueur donnée.	341
XII. Trouver une courbe dans laquelle la normale soit proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée.	344
XIII. Trouver une courbe telle que la tangente, en un point, fasse avec le rayon vecteur de ce point un angle constant.	346
XIV. Problème sur l'aire d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.	347
XV. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit proportionnel à la normale.	351
XVI. Trouver une courbe dans laquelle la longueur de la tangente en un point quelconque, comprise entre le point de contact et l'axe des x , soit constante et égale à une ligne donnée m	356

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS,

	Pages.
Détermination d'un point dans l'espace.	364
Distance de deux points	
$\Delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$	
$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	365
Représentation géométrique d'une équation à une variable. . . .	366
Représentation géométrique d'une équation à deux variables. . .	366
Représentation géométrique d'une équation à trois variables. . .	367
Représentation de la ligne droite.	368
Parallélisme de deux droites.	369
Équations de la droite qui passe par deux points.	369
Équations d'une droite passant par un point.	369
Angles d'une droite avec les trois axes coordonnés.	371
Expressions du cosinus de l'angle V de deux droites en fonction des cosinus des angles que les droites font avec les trois axes coordonnés.	
$\cos V = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$	371
Définition et équation du plan.	372
Équation du plan en fonction de ses coordonnées à l'origine	
$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$	373
Des problèmes sur le plan.	374

APPENDICE.

De quelques questions qui rencontrent leur application en mécanique.

	Pages.
I. Intégrer l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$.	
$y = P. \cos nx + Q. \sin nx$	375
II. Définition et détermination de l'équation de la courbe-enveloppe d'une courbe donnée.	376
<i>Application.</i> — Enveloppe de la trajectoire dans le vide. (C'est une parabole.).	377
III. Équation du plan osculateur d'une courbe à double courbure.	378
IV. Calcul du volume d'un corps terminé par des surfaces quelconques. — Intégrale double.	379
<i>Application.</i> — Calcul du volume de l'ellipsoïde.	381
V. Calcul de l'aire d'une surface terminée par une courbe non définie.	383

FIN DE LA TABLE-AIDE-MÉMOIRE.

ERRATA.

Pages.	Lignes en descendant.	Au lieu de	Lisez
18,	22,	le facteur $m =$,	le facteur $m = 2$.
39,	17,	Donc si $0 \neq OP' = 1$,	Donc si $OP = OP' = 1$.
44,	19,	$y = \frac{X \sin \alpha + Y \cos \alpha'}{\sin \theta}$,	$y = \frac{X \sin \alpha + y \cos \alpha'}{\sin \theta}$.
58,	17,	$(y - \alpha) + (y - \zeta)^2 = R^2$,	$(x - \alpha)^2 + (y - \zeta)^2 = R^2$.
57,	15,	$\delta = \frac{(y' - \alpha \alpha' - b) \sin \theta}{\pm \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}$,	$\delta = \frac{(y' - \alpha \alpha' - b) \sin \theta}{\pm \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}$.
61,	6,	$y - y' = \frac{a^2 y'^2}{b^2 x^2} \cdot (x - x')$,	$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} \cdot (x - x')$.
65,	1,	$y = \frac{y'}{x'} \cdot x$,	$y = \frac{y'}{x'}$.
75,	14,	une quantité,	une quantité variable.
75,	27,	de la tangente à une courbe algébrique,	de la tangente à une courbe quelconque.
83,	dernière ligne,	$= \frac{p}{q} n^{\frac{p}{q}-1} du$,	$= \frac{p}{q} u^{\frac{p}{q}-1} du$.
113,	20,	$f'''(x) = \frac{1.2. \text{Log } e}{x^2}$,	$f'''(x) = \frac{1.2. \text{Log } e}{x^3}$.
167,	22,	indépendante de x ,	indépendante x .
178,	11,	doit être moindre que 1,	doit être plus grande que 1.
184,	5,	$1 + Tg^2 \varphi = C^2 \varphi^2 n^2 y^2$,	$1 + Tg^2 \varphi = C^2 n^2 y^2$.
193,	10,	de la sous-normale,	de la normale.
209,	10,	au carré de la ligne.	au carré de la moitié de la ligne.
299,	18,	sera le lieu,	sera celle du lieu.

COURS D'ANALYSE.

INTRODUCTION.



I.

COMPLÈMENT DE GÉOMÉTRIE.

ÉTUDE DES SECTIONNÉS CONIQUES.

Un plan ne peut couper un cône droit que de trois manières : 1° il rencontre toutes les génératrices d'une même nappe; 2° il est parallèle à l'une des génératrices; 3° il rencontre les génératrices des deux nappes du cône.

Section obtenue par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe. — Ellipse.

Soit SZ l'axe d'un cône droit et soit M un plan qui coupe toutes les génératrices d'une même nappe, la nappe inférieure. Par l'axe SZ faisons passer un plan perpendiculaire au plan M . Ce plan perpendiculaire coupe la surface du cône suivant les deux génératrices SX , SY ; en sorte que l'angle générateur du cône est l'angle XSZ . Soit MM' la trace du plan de section sur le plan XSZ .

Ceci posé, dans le triangle ASA' décrivons le cercle inscrit de centre O , puis le cercle exinscrit de centre O' ; les points de tangence de ces cercles avec le côté AA' sont F et F' . On a vu dans les éléments de géométrie que

$$AF = A'F' \dots (*)$$

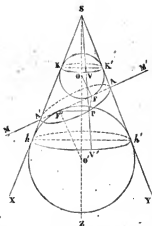
(*) Sur la figure on a :

$$Sh = A'A + A'K + SK = A'F' + A'F + SK = 2A'F' + FF' + SK,$$

$$Sh = AA' + AK' + SK' = AF' + AF + SK = 2AF + FF' + SK.$$

Or $Sh = SK'$; donc $A'F' = AF.$

ANALYSE.



Si l'on fait toerner l'angle générateur XSZ autour de SZ, l'arête SX décrit le cône, et les demi-circonférences de centres O et O' engendrent des sphères tangentes au cône suivant les cercles parallèles KK' et AA'.

Ces sphères sont aussi tangentes en F et en F' au plan de section MM', car les rayons OF, O'F' sont perpendiculaires à ce plan.

Soit P un point quelconque de la courbe d'intersection du plan MM' et du cône; joignons PF, PF', puis menons la génératrice SP de ce point P; les droites PF, PF', PV, PV' sont des tangentes aux sphères de centres O, O'; et puisque les tangentes issues d'un

même point et menées à une même sphère sont égales, on a :

$$PF' = PV',$$

$$PF = PV;$$

d'où :

$$PF' + PF = PV + PV' = VV' = KA$$

Mais

$$KA = KA' \text{ (ou } AF) + A'h \text{ (ou } A'F' = AF).$$

Par suite :

$$PF' + PF = AF' + AF = AA'.$$

Donc : la courbe de section d'un cône droit, par un plan qui rencontre toutes les génératrices d'une même nappe, jouit de cette propriété que la somme des distances d'un de ses points à deux points fixes situés dans le plan de la courbe, est constante et égale à la ligne qui joint ces deux points et est terminée à la courbe.

Une telle courbe s'appelle *Ellipse*; et les deux points fixes F et F' (lesquels sont situés à égale distance des extrémités de la droite AA') sont dits les *foyers* de l'ellipse.

Les distances FP, F'P d'un même point de la courbe aux deux foyers sont appelées les *rayons vecteurs* de ce point.

Remarque. — On voit aisément que pour tout point situé hors de l'ellipse, la somme de ses distances aux deux foyers est plus grande que le grand axe et pour un point pris dans l'intérieur de la courbe, la somme de ses distances aux deux foyers est moindre que le grand axe.

Variétés de l'ellipse. — Si le plan MM', au lieu d'être oblique sur

l'axe SZ , était perpendiculaire, la section serait un cercle, et si le plan MM' se rapprochait du sommet S , la section serait une courbe de plus en plus petite; au sommet S la courbe se réduirait à un point.

Les variétés de l'ellipse sont donc un cercle et un point.

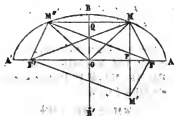
La ligne qui joint les foyers et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette ligne sont les deux axes de l'ellipse.

Par axe d'une courbe, on entend une ligne qui divise cette courbe en deux parties symétriques.

Soit FF' AA' la ligne qui joint les foyers; appelons $2a$ la distance AA' et menons la perpendiculaire BB' sur le milieu O de FF' . Soit M un point de la courbe, alors

$$(1)..... MF + MF' = 2a.$$

1° Abaissons de M la perpendiculaire MP et prolongeons-la de



$PM' = PM$; je dis que le point M' symétrique de M appartient à la courbe; en effet, les obliques MF , $M'F$ sont égales ainsi que les obliques MF' et $M'F'$, l'égalité (1) devient donc, par substitution,

$$MF + M'F' = 2a.$$

Le point M' est donc sur la courbe; donc la droite AA' est un axe de l'ellipse.

2° Abaissons de M la perpendiculaire MQ sur BB' , et prolongeons-la de $QM'' = MQ$; puis joignons $M''F$, $M''F'$, $M''O$ et MO . Les triangles rectangles QMO , $QM''O$ sont égaux; donc $MO = M''O$ et angle $M''OB = MOB$; par suite, les triangles MOF , $M''OF$ sont égaux comme ayant un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc $MF = M''F$. De même, les deux triangles $M''OF$ et MOF' ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun; donc $M''F = MF'$; l'équation (1) devient donc encore, par substitution,

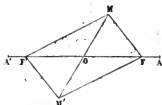
$$M''F + M''F' = 2a.$$

Le point M'' est donc sur la courbe et la droite BB' est un axe de cette courbe.

Nous désignerons par $2b$ l'axe BB' .

Le point milieu de la ligne qui joint les foyers est le centre de l'ellipse.

Par centre d'une courbe on entend un point tel que toute corde qui passe par ce point y est divisée en deux parties égales.



Soit M un point de la courbe ;
alors

$$(1) \dots MF + MF' = AA' \text{ ou } 2a.$$

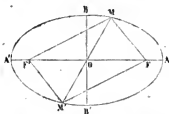
Joignons la ligne MO et prolongeons-la de $M'O = MO$, puis joignons $M'F'$ et $M'F$; puisque le point O est le milieu des lignes

FF' et MM' , il en résulte que la figure $MFM'F'$ est un parallélogramme ; donc $M'F' = MF$ et $M'F = MF'$, en sorte que l'équation (1) devient, par substitution,

$$M'F + M'F' = 2a.$$

Le point M' appartient donc à la courbe, et la droite MM' est une corde divisée en deux parties égales par le point O . Par suite, ce point est le centre de l'ellipse.

La ligne qui joint les foyers est la ligne la plus grande que l'on puisse mener par le centre de l'ellipse.



Soit une ligne quelconque MM' menée par le centre, joignons $MF, MF', M'F, M'F'$. Dans le triangle MFM' , on a :

$$MM' < MF + M'F,$$

ou bien, puisque la figure $MFM'F'$ est un parallélogramme,

$$MM' < MF + MF'.$$

Et puisque le point M est sur la courbe, on a :

$$MF + MF' = AA';$$

donc :

$$MM' < AA'.$$

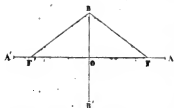
La droite AA' est dite le *grand axe* de l'ellipse, et BB' est appelé le *petit axe*.

Le grand axe diffère du petit axe, outre la différence de longueur, en ce qu'il contient les foyers.

Expression de la distance du centre à l'un des foyers en fonction des axes.

Soient AA', BB' les deux axes désignés par $2a$ et $2b$; en joignant BF , le triangle rectangle BOF donne

$$OF = \sqrt{BF^2 - OB^2}.$$



Et puisque $BF = BF'$ et qu'en outre $BF + BF' = 2a$, on a, par suite,

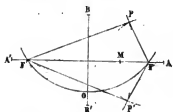
$$OF = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

La distance OF , que l'on désigne par $2c$, est appelée la distance focale de l'ellipse, et le rapport $\frac{c}{a}$

prend le nom d'*excentricité*.

Si $a = b$, $c = 0$, et l'ellipse devient un cercle.

Construction de l'ellipse au moyen de ses axes.



Soient AA' et BB' les deux axes d'une ellipse ; si, du point B comme centre avec OA pour rayon, on décrit un cercle, ce cercle coupe le grand axe AA' en deux points F et F' , lesquels sont les foyers de la courbe.

Si l'on marque un point quelconque M sur AA' et situé entre

les foyers F, F' ; et si de F et de F' comme centres, avec des rayons respectivement égaux aux longueurs AM et $A'M$, on décrit des cercles ; ces cercles se couperont en deux points symétriques P et P' , lesquels seront des points de l'ellipse, car sur la figure on a :

$$PF + PF' = MA + MA' = AA'.$$

$$P'F + P'F' = MA + MA' = AA'.$$

Les deux cercles qui déterminent les points P et P' se couperont toujours, car la distance FF' de leurs centres est plus petite que la somme AA' de leurs rayons et plus grande que la différence $MA' - MA$ de ces mêmes rayons.

Un même point M , pris entre F et F' , donne lieu ainsi à quatre points de l'ellipse ; car aux centres F et F' on pourra intervertir l'ordre des deux rayons MA et MA' .

Par ce procédé, on construira l'ellipse par points.

On peut décrire l'ellipse par un trait continu ; à cet effet, on fixe aux foyers F et F' les extrémités d'un fil de longueur AA' , puis on tend ce fil au moyen d'un style dont la pointe décrit la courbe.

Le point K se trouve donc situé entre les deux points M et M'; par conséquent, lorsque M' viendra se confondre avec M, les trois points M, M' et K se confondront; or, de ce que la ligne UKF est droite et que les perpendiculaires PU et PF' sont égales, on a :

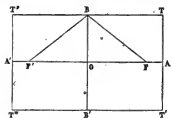
$$\text{angle F'KP} = \text{angle FKM'}.$$

Donc la tangente en un point de l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs de ce point.

Remarque I. — Il résulte de ce théorème que la normale à l'ellipse divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs du point de contact.

Remarque II. — L'ellipse provenant de la section d'un cône droit à base circulaire par un plan, il en résulte que l'ellipse ne peut être coupée par une ligne droite en plus de deux points, par suite la tangente à cette courbe ne la rencontre qu'en un seul point.

Les tangentes aux extrémités des axes de l'ellipse sont perpendiculaires à ces axes.



Soient AA', BB', F et F' les axes et les foyers de l'ellipse.

Les rayons vecteurs du point A se confondent avec le grand axe AA'; par suite TT' étant la tangente en A, on a :

$$\text{angle A'AT} = \text{angle A'AT'},$$

et comme la somme de ces deux angles vaut deux droits, il en résulte que TT' est perpendiculaire sur AA'.

De même T''T''', tangente en A' est perpendiculaire sur AA'.

Soit TT'' la tangente en B, les rayons vecteurs du point B sont BF, BF', et l'on a :

$$\text{angle TBF} = \text{angle T''BF'}.$$

Et puisque le triangle F'BF est isocèle, il en résulte que

$$\text{angle F'BO} = \text{angle OBF}.$$

Par suite TT'' est perpendiculaire sur BB'.

De même T''T''' est perpendiculaire sur BB'.

L'ellipse est donc inscrite dans le rectangle construit sur ses axes.

Les points extrêmes des axes sont appelés les sommets de la courbe.

PROBLÈME. — *Mener par un point une tangente à l'ellipse.*



Si le point est donné sur la courbe en M , je mènerai les rayons vecteurs MF et MF' de ce point, puis la bissectrice MN de l'angle formé par ces rayons.

Cette ligne MN est la normale menée en M ; alors, si sur MN on élève la perpendiculaire TT' , on a en TT' la tangente cherchée. Ou bien, on pourrait mener immédiatement la bissectrice de l'angle $F'MK$, MK étant le prolongement du rayon vecteur FM .

Le problème n'admet évidemment qu'une seule solution.

Le point est hors de la courbe.

Soit R le point donné; supposons le problème résolu, et soit RMT la tangente cherchée.



Si le point M de tangence était connu, la question serait résolue. Cherchons ce point.

Abaissons de F' la perpendiculaire $F'P$ sur la tangente, et prolongeons-la de $PU = F'P$; puis joignons RF' , RU , MF' , MF et MU .

De cette construction résulte ceci :

La ligne UM est le prolongement de MF ; donc, si le point U était déterminé, l'intersection de la ligne UF avec l'ellipse donnerait le point de tangence.

Or $RU = RF'$, donc le point U se trouve sur le cercle décrit de F comme centre avec le rayon connu RF' .

De plus, $MU = MF'$; donc $MU + MF = MF' + MF = A'A$; donc le point U se trouve sur le cercle décrit de F comme centre, avec le grand axe pour rayon.

Le point U se trouve donc à l'intersection de deux cercles dont les centres et les rayons sont connus.

De ces considérations résulte la construction indiquée sur la figure.

La construction est-elle possible? Pour que la construction soit possible, il faut que les deux cercles se coupent, ce qui exige que leur ligne des centres, laquelle est RF , soit plus petite que la somme de leurs rayons et plus grande que leur différence.

Le triangle RFF' donne :

$$\begin{aligned} RF &< RF' + FF', \\ RF &> RF' - FF'. \end{aligned}$$

Et à fortiori, puisque FF' est moindre que AA' ,

$$\begin{aligned} RF &< RF' + AA', \\ RF &> RF' - AA', \end{aligned} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} RF < AA' + RF', \\ RF > AA' - RF'. \end{cases}$$

Si le point est hors de la courbe, les deux cercles se coupent; donc, dans ce cas, il y a deux tangentes à l'ellipse menées par le point donné.

Si le point est sur la courbe,

$$RF = AA' - RF'.$$

Donc les deux cercles sont tangents intérieurement, et l'on ne peut mener qu'une tangente à l'ellipse par le point donné.

Enfin, si le point est dans l'intérieur de la courbe,

$$AA' > RF + RF';$$

d'où :

$$RF' < AA' - RF.$$

Les deux cercles sont donc intérieurs, et il y a impossibilité de mener une tangente à l'ellipse.

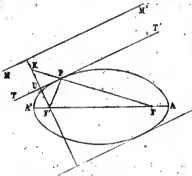
Remarque. — Les deux points C et P sont les milieux des droites FF' et $F'U$; donc, en joignant CP,

$$CP = \frac{1}{2} FU, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} AA'.$$

Donc la ligne qui joint le centre de l'ellipse au pied de la perpendiculaire abaissée d'un des foyers sur la tangente en un point de cette courbe est constante et égale au demi-grand axe, c'est-à-dire que :

Le lien des projections des foyers de l'ellipse sur ses tangentes est le cercle décrit sur le grand axe de cette courbe.

PROBLÈME. — *Mener à l'ellipse, une tangente parallèle, à une direction donnée.*



Soit MM' la direction donnée; supposons le problème résolu et soit TT' la tangente cherchée laquelle est parallèle à MM' .

Abaïssons de l'un des foyers, F' par exemple, la perpendiculaire $F'U$, et prolongeons-la de $UK = UF'$, si le point K était connu, la question serait résolue, car en menant par le point U milieu de KF' une perpendiculaire sur KF' , on

aurait la tangente cherchée.

Joignons le point P de tangence aux points K et F , F' , dès lors $KP = PF'$ et KP est le prolongement de PF , par suite,

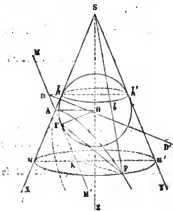
$$KF = PF' + PF = AA'.$$

Donc le point K cherché se trouve sur la perpendiculaire abaissée du foyer F' sur la direction donnée et sur le cercle décrit de l'autre foyer F avec le grand axe AA' pour rayon.

Le problème admet donc deux solutions.

La solution de la question n'exige point la connaissance de la courbe, il suffit d'avoir le grand axe et les deux foyers.

SECTION DU CÔNE DROIT PAR UN PLAN PARALLÈLE À L'UNE DES GÉNÉRATRICES.



Par l'axe SZ du cône, faisons passer un plan perpendiculaire au plan de section MM' .

Le plan passant par SZ coupe la surface du cône suivant les génératrices SX , SY ; soit MM' la trace sur le plan SXY du plan de section. Alors, les droites MM' et SY sont parallèles.

Menons le cercle de centre O , tangent aux droites SX , SY et MM' ; ce cercle en tournant autour de SZ engendre une sphère inscrite dans le cône suivant le

cercle de diamètre Ah' ; cette sphère est tangente en F au plan MM' .

Le plan du cercle Ah' et le plan MM' étant tous deux perpendiculaires sur le plan XSY , se coupent suivant une droite DD' perpendiculaire au plan XSY , et par suite à MM' .

Sur la figure, on a :

$$AF = Ah = AD.$$

En sorte que le point A, origine de la courbe d'intersection du plan MM' et du cône, divise en deux parties égales la longueur DF.

Ceci posé, soit P un point de la courbe d'intersection du plan MM' du cône; menons par ce point le cercle uu' perpendiculaire à l'axe du cône; puis joignons PF, PK et menons la génératrice SP.

De cette construction il résulte que KP est perpendiculaire sur MM' et par suite parallèle à DD' et que PF est tangente à la sphère de centre O ainsi que Pb.

Comme tangentes menées d'un même point à une même sphère, on a :

$$PF = Pb.$$

Or :

$$Pb = uh = Ah \text{ (ou DA) } + Au \text{ (ou AK) } = DK.$$

Donc :

$$PF = DK.$$

Et puisque DK représente la distance du point P à la droite PP' , il en résulte que :

La section du cône droit par un plan parallèle à l'une des génératrices, est une courbe dite parabole, dont tous les points sont également distants d'une droite et d'un point déterminés et situés dans son plan.

La droite fixe DD' se nomme *directrice* et le point F *foyer*.

Remarque I. — Tout point pris en dehors de la parabole est plus rapproché de la directrice que du foyer; le contraire a lieu pour un point pris dans l'intérieur de la courbe.

Remarque II. — Si le second point M' (voir la première figure) de rencontre de la trace du plan MM' avec la génératrice SY s'éloigne constamment du sommet S, il arrivera à être parallèle à la génératrice SY qu'il rencontre à l'infini.

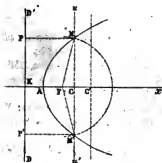
Dans ce cas, le second foyer de l'ellipse ainsi que le centre de cette courbe, se trouvent à l'infini; et l'ellipse s'allongeant de plus en plus devient la parabole.

La parabole peut donc être considérée comme une ellipse dont le centre et l'un des foyers sont situés à l'infini.

On démontrera comme précédemment que la perpendiculaire AF abaissée du foyer sur la directrice DD' est l'axe de la parabole.

Le point A milieu de DF est le sommet de la courbe.

**CONSTRUCTION DE LA PARABOLE PAR POINTS CONNAISSANT SON Foyer
ET SA DIRECTRICE.**



Soient F le foyer et DD' la directrice de la parabole.

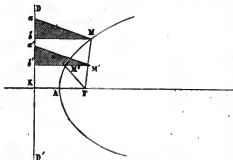
En abaissant de F sur DD' la perpendiculaire KFx on a la direction de l'axe et si l'on prend le point A milieu de KF , A est le sommet de la parabole.

Sur l'axe Kx et à partir de A , prenons un point quelconque C ; en ce point sur Ax , élevons la perpendiculaire uu' , puis du point F comme centre avec la

distance FC , de cette perpendiculaire à la directrice, décrivons un cercle, lequel coupera uu' en deux points M et M' ; ces deux points appartiennent à la parabole, car on a :

$$MF = MP \qquad M'F = M'P.$$

Pour tout point, tel que C pris sur Ax , on a ainsi deux points de la parabole; on obtiendra par ce procédé autant de points de la courbe que l'on voudra. La jonction de ces points par un trait continu donnera la parabole.



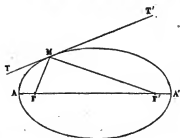
On peut par le procédé suivant, décrire la parabole d'un trait continu :

Une équerre abM , glisse suivant un de ses côtés de l'angle droit, le long de la directrice DD' , un fil de longueur bM est fixé par ses deux extrémités en M et en F , à mesure que l'équerre glisse le long de DD' , un style

amène le fil le long du côté Mb et puisque dans toutes les positions de l'équerre, la pointe du style est équidistante du foyer F et de la directrice DD' , cette pointe décrit la parabole.

Variété de la parabole. — Si le plan MM' , passe par le sommet du cône, il devient tangent au cône et la section se réduit à l'arête de contact. La parabole peut donc se réduire à une ligne droite.

La tangente fait des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et la parallèle menée par ce point à l'axe de la courbe.



TT' étant la tangente menée en M à l'ellipse, on a :

$$(1) \text{ angle } TMF' = \text{angle } TMF.$$

Si l'on suppose que le foyer F' s'éloigne successivement vers l'infini, l'égalité (1) subsiste toujours.

A la limite, c'est-à-dire lorsque la distance FA' est infinie, la ligne MF' devient parallèle à l'axe AA' et l'ellipse devient la parabole, en sorte que pour cette courbe on a :

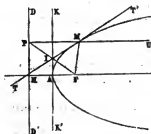
$$\text{angle } TMF = \text{angle } TMU.$$

Remarque. — La tangente à la parabole n'a qu'un point commun avec la courbe. En A, la tangente est perpendiculaire à l'axe.

PROBLÈME. — Mener par un point donné, une tangente à la parabole.

1° Le point donné est sur la courbe.

Soit M le point donné par lequel on veut mener une tangente à la parabole dont le foyer est F et dont la directrice est DD'.



Supposons le problème résolu et soit MT la tangente cherchée, on a :

$$\text{ang. } TMF = \text{ang. } TMU.$$

Par suite si l'on prolonge MU jusqu'à sa rencontre en P avec DD',

$$\text{angle } PMT = \text{angle } TMF.$$

Donc pour mener la tangente au point M pris sur la courbe, il suffit de mener le rayon vecteur MF

de ce point et la perpendiculaire MP abaissée de ce point sur la directrice; puis de tracer la bissectrice de l'angle formé par ces deux lignes.

Ce qui revient à joindre le point donné M au point de rencontre I, de la tangente KK' au sommet et de la ligne FP.

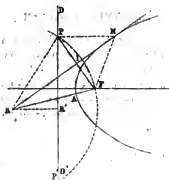
En effet, le triangle PMF étant isocèle, la bissectrice MI doit passer au milieu de la base PF. Or ce milieu est le point I, car $AH = AF$ et KK' est parallèle à DD' .

Remarque. — La ligne FI est perpendiculaire sur la tangente MT; donc :

Le lieu des projections du foyer de la parabole sur ses tangentes est la tangente menée au sommet de la courbe.

La droite KK' est en effet ce que devient le lieu des projections des foyers de l'ellipse sur ses tangentes, lorsqu'on suppose infini le grand axe de cette courbe.

2° Le point donné est hors de la courbe.



Soit R le point par lequel on veut mener une tangente à la parabole et soit RM cette tangente cherchée; menons le rayon vecteur FM, puis la perpendiculaire MP et joignons PF.

Nous savons que le point I est le milieu de PF, dès lors si le point P, situé sur la directrice DD' était connu, le point de tangence le serait également; car ce point s'obtiendrait par l'intersection de la droite PM élevée en P sur la directrice et de la perpen-

diculaire RI, abaissée du point donné R sur la droite PF; de plus cette perpendiculaire RI serait la tangente cherchée.

Or, remarquons que le point I étant le milieu de PF, on a :

$$RF = RP.$$

Donc : le point P cherché est le point d'intersection du cercle décrit du point donné comme centre avec la distance RF de ce point au foyer pour rayon.

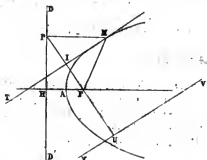
De cette analyse de la question, résulte la construction indiquée sur la figure.

Le point R étant hors de la courbe, RF est plus grand que RR' ; alors le cercle de rayon RF coupe DD' en deux points et le problème admet

deux solutions. Si le point R est sur la courbe, $RF = RR'$, par suite une seule solution. Enfin, si le point R est dans l'intérieur de la courbe RF est plus petit que RR' , par suite impossibilité de résoudre la question.

PROBLÈME. — *Parallèlement à une droite donnée mener une tangente à la parabole.*

Proposons-nous de mener une tangente à la parabole, parallèlement à la direction donnée VV' .



Supposons le problème résolu et soit TM la tangente cherchée; si le point de tangence M était connu, la question serait résolue.

Menons la perpendiculaire MP sur la directrice et joignons PF ; nous savons que PF est perpendiculaire sur la tangente MT et qu'en outre le point I est le milieu de PF .

Or PF étant perpendiculaire à MT , l'est aussi à sa parallèle VV' ; donc en abaissant de F la perpendiculaire FU sur VV' , la rencontre de cette ligne avec la directrice donne le point P .

Si l'on élève en P sur la directrice, la perpendiculaire PM , on a ainsi un premier lieu du point M ; et enfin, si par le milieu I de PF on élève sur PF une perpendiculaire TI , on a un second lieu du point M ; de plus, ce second lieu est la tangente cherchée.

Le problème est donc toujours possible, sauf le cas où la direction donnée est parallèle à l'axe Ax .

La question n'admet jamais qu'une seule solution.

La sous-normale en un point de la parabole est constante et égale à la distance du foyer à la directrice.

Soit M un point de la parabole, menons le rayon vecteur de ce point, puis la perpendiculaire MP que nous prolongerons sur la droite.

Si nous menons la bissectrice MN de l'angle FMU , MN sera évidemment la normale du point M , car TM étant la tangente, on a :

$$\text{angle } TMF = \text{angle } T'MU.$$

II.

COMPLÈMENT D'ALGÈBRE.

FORMULE DU BINÔME DE NEWTON.

La multiplication algébrique donne les résultats suivants :

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$(x + a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$$

$$(x + a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$$

L'observation de ces résultats établit cette loi évidente :

Dans le développement d'une puissance entière du binôme $x + a$,

1° Les exposants de x vont constamment en décroissant d'une unité depuis le premier terme, dans lequel l'exposant de x est celui de la puissance du binôme, jusqu'au dernier terme dans lequel l'exposant de x est nul.

2° Les coefficients du premier et du dernier terme sont l'unité.

3° Le dernier terme est une puissance de a , marquée par l'exposant de la puissance du binôme.

4° Enfin le nombre des termes du développement est égal à l'exposant + 1, de la puissance du binôme.

Donc la puissance $m^{\text{ième}}$ du binôme sera une expression de la forme :

$$(x + a)^m = x^m + A.x^{m-1} + B.x^{m-2} + C.x^{m-3} + \dots$$

les coefficients $A, B, C, \dots$ étant des nombres convenablement déterminés.

D'après la loi reconnue précédemment, le second membre doit avoir $m + 1$ termes et son dernier doit toujours être a^m .

Pour $m = 0$, le second membre doit se réduire à un seul terme, donc tous les termes à partir du second doivent s'annuler pour $m = 0$, c'est-

à-dire que les coefficients de ces termes doivent contenir le facteur m ; donc le développement de $(x+a)^m$ doit être de la forme :

$$(x+a)^m = x^m + mAxx^{m-1} + mBx^{m-2} + mCx^{m-3} + \dots$$

Pour $m=1$, le second membre ne doit avoir que deux termes et le deuxième doit être a , pour $m=1$, $mAxx^{m-1}$ devient A par suite :

$$A = a.$$

De plus, puisque tous les termes à partir du troisième inclusivement doivent s'annuler pour $m=1$, il en résulte que les coefficients de ces termes doivent contenir le facteur $m-1$, en sorte que le développement de $(x+a)^m$ doit être de la forme :

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + m(m-1)Bx^{m-2} + \dots$$

Pour $m=2$, le second membre doit se réduire à trois termes dont le dernier a pour valeur a^2 , pour $m=2$ le troisième terme $m(m-1) \cdot Bx^{m-2}$ devient :

$$2 \cdot 1 \cdot B.$$

donc :

$$2 \cdot 1 \cdot B = a^2.$$

Par suite :

$$B = \frac{a^2}{1 \cdot 2}.$$

En outre, tous les termes du second membre à partir du quatrième inclusivement devant s'annuler pour $m=2$, les coefficients de ces termes doivent donc contenir le facteur $m-$, en sorte que le développement $(x+a)^m$ est de la forme :

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + m(m-1)(m-2)Cx^{m-3} + \dots$$

Et ainsi de suite, on trouvera de même :

$$C = \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad D = \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ etc.}$$

en sorte que, pour le développement de la puissance $m^{\text{ième}}$ du binôme $x+a$, on trouve la formule :

$$\begin{aligned} (x+a)^m = & x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \dots \\ & + \frac{m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n} a^n x^{m-n} + \dots + a^m. \end{aligned}$$

Cette formule est due à Newton.

Loi de formation du développement de $(x + a)^m$.

Le développement de $(x + a)^m$ se forme d'après la loi suivante, reconnue à l'inspection de la formule que nous venons de trouver.

1° Les exposants de x , vont constamment en décroissant d'une unité depuis le premier terme dans lequel l'exposant de x est celui de la puissance du binôme, jusqu'au dernier où cet exposant est nul.

2° Les exposants de a , vont au contraire en croissant constamment d'une unité, depuis le premier terme dans lequel l'exposant de a est nul jusqu'au dernier dans lequel l'exposant de a est celui de la puissance du binôme.

3° Les coefficients du premier et du dernier terme sont l'unité et pour passer du coefficient d'un terme au coefficient du terme suivant, il faut multiplier ce coefficient par l'exposant de x dans ce terme et le diviser par le rang de ce terme.

Le nombre des termes du développement de $(x + a)^m$ est $m + 1$.

Les coefficients des termes du binôme vont en croissant jusqu'au terme du milieu.

Dans le développement ,

$$(x + a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \dots + a^m.$$

Considérons le terme qui en a $n - 1$ avant lui et dont le rang est n : appelons K son coefficient numérique, la valeur de ce terme est :

$$K a^{n-1} x^{m-n+1}.$$

D'après la loi de formation reconnue plus haut, le terme suivant a pour valeur

$$K \cdot \frac{m-n+1}{n} \cdot a^n \cdot x^{m-n}.$$

Le coefficient de ce terme est donc

$$K \cdot \frac{m-n+1}{n}.$$

Et pour qu'il soit plus grand que le coefficient K du terme précédent, il faut que l'on ait :

$$\frac{m-n+1}{n} > 1 \dots (a).$$

Cette inégalité donne :

$$n < \frac{m+1}{2}.$$

Donc, tant que n (c'est-à-dire le nombre qui indique le rang d'un terme) sera moindre que $\frac{m+1}{2}$ ou le nombre des termes du développement de $(x+a)^m$; l'inégalité (a) sera satisfaite, c'est-à-dire que le coefficient d'un terme sera $>$ que le coefficient du terme précédent.

Or $\frac{m+1}{2}$ indique le rang du terme milieu. Donc, les coefficients des termes du binôme, vont en croissant jusqu'au terme du milieu.

Les développements de $(x+a)^2$, $(x+a)^3$, $(x+a)^4$, etc... montrent que les coefficients des termes à égale distance des extrêmes sont égaux.

Développement de $(x-a)^m$.

En remplaçant a par $-a$ dans le développement :

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} a^3 x^{m-3} + \dots + a^m.$$

On obtient :

$$(x-a)^m = x^m - m a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2.} a^2 x^{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} a^3 x^{m-3} + \dots + (-a)^m.$$

Ce développement donne en y faisant $m = 2, 3, 4, \dots$

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2,$$

$$(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3,$$

$$(x-a)^4 = x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4.$$

APPLICATION DE LA FORMULE DU BINÔME.

Du nombre e et de ses propriétés.

Soit à déterminer la limite de l'expression.

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

lorsque α tend vers zéro.

Posons $\alpha = \frac{1}{m}$ alors la limite $\alpha = 0$ correspond à la limite $m = \infty$ et réciproquement.

La formule du binôme donne :

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = 1 + m \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{m^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{m^3} + \dots$$

Ou bien

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{m(m-1)}{m \cdot 2m} + \frac{m(m-1)(m-2)}{m \cdot 2m \cdot 3m} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{m \cdot 2m \cdot 3m \cdot 4m} + \dots$$

Ou bien encore ; en effectuant les divisions :

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) + \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3m}\right) + \\ + \frac{1}{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}\right) \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3m}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4m}\right) + \dots$$

Et en passant à la limite $\alpha = 0$, c'est-à-dire $m = \infty$, il vient finalement :

$$\text{Lim. } (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} + \dots$$

Cette limite est appelée le nombre e .

Si α est négatif $1 + \alpha$ est < 1 ; soit alors $1 + \alpha = \frac{1}{1 + \beta}$, β étant une fraction positive dont la limite est zéro,

L'équation $1 + \alpha = \frac{1}{1 + \beta}$ donne $\alpha = -\frac{\beta}{1 + \beta}$ en sorte que

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 - \frac{\beta}{1 + \beta}\right)^{-\frac{1 + \beta}{\beta}} = \left(\frac{1}{1 + \beta}\right)^{-\frac{1 + \beta}{\beta}} = \\ = \frac{1}{\left(\frac{1}{1 + \beta}\right)^{\frac{1}{\beta}(1 + \beta)}} = (1 + \beta).$$

β étant une fraction positive, on a

$$\text{Lim. } (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} = e.$$

Lorsque β converge vers zéro. On a donc aussi

$$\text{Lim. } (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}(1 + \beta)} = e.$$

Car alors l'exposant $(1 + \beta)$ devient 1. Donc encore

$$\lim. (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

THÉORÈME I. — *Le nombre e est compris entre 2 et 3*

Puisque

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

e est évidemment > 2 .

Je dis que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots < 1.$$

En effet, remplaçons les facteurs 3, 4, ... des dénominateurs par le nombre 2, nous augmenterons ainsi chacune des fractions, en sorte que l'on a :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Or

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Donc :

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots + \frac{1}{1.2.3 \dots n} + \dots < 1.$$

Donc e est compris entre 2 et 3.

THÉORÈME II. — *Le nombre e est incommensurable.*

Nous venons de voir que e est compris entre 2 et 3, le nombre e ne peut donc être entier; il sera donc établi que e est incommensurable si l'on démontre que le nombre e ne peut être égal à une expression fractionnaire.

Supposons en effet que l'on puisse avoir, a et b étant entiers :

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

La loi de formation des dénominateurs du second membre montre

que, quel que soit le nombre entier b , on aura dans le second membre la fraction $\frac{1}{1.2.3... (b-1).b}$. En sorte que l'on peut écrire

$$\frac{a}{b} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3...(b-1)b} + \frac{1}{1.2.3...b.(b+1)} + \frac{1}{1.2.3...b.(b+1)(b+2)}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par le produit

$$1.2.3...b.$$

Les fractions du second membre jusqu'à y compris la fraction $\frac{1}{1.2.3...(b-1)b}$ sont remplacées par des nombres entiers, en sorte que si l'on appelle P l'ensemble des nombres entiers, on a :

$$1.2.3...(b-1).a = P + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)}.$$

Et si l'on remplace les facteurs $b+2$, $b+3$, $b+4$, etc... des dénominateurs par $(b+1)$, il vient :

$$1.2.3...(b-1).a - P < \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots + \frac{1}{(b+1)^n}.$$

Or :

$$\frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \dots = \frac{\frac{1}{b+1}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1}{b}.$$

Donc :

$$1.2.3...(b-1).a - P < \frac{1}{b}.$$

La différence de deux nombres entiers serait donc une fraction, ce qui ne peut être. $\frac{a}{b}$ ne peut donc représenter le nombre e .

Ce nombre est donc incommensurable.

Valeur de e . — En effectuant les calculs indiqués dans le second membre du développement :

$$e = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \dots$$

On trouve :

$$e = 2,71828 \dots \dots \dots$$

SOMME DES PUISSANCES SEMBLABLES DES TERMES D'UNE PROGRESSION
ARITHMÉTIQUE ET SOMME DES PILES DE BOULETS.

*Recherche de la somme des puissances semblables des termes
d'une progression arithmétique.*

Soit une progression arithmétique

$$a, b, c, d, \dots, k, l.$$

Appelons r sa raison, dès lors :

$$b = a + r, \quad c = b + r, \quad d = c + r, \dots \quad l = k + r.$$

Désignons par s_m la somme inconnue

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \dots + k^m + l^m.$$

On a, par la formule du binôme :

$$b^{m+1} = a^{m+1} + (m+1).r.a^m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.a^{m-1} + \dots + (m+1)r^m.a + r^{m+1},$$

$$c^{m+1} = b^{m+1} + (m+1).r.b^m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.b^{m-1} + \dots + (m+1)r^m.b + r^{m+1},$$

$$d^{m+1} = c^{m+1} + (m+1).r.c^m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.c^{m-1} + \dots + (m+1)r^m.c + r^{m+1},$$

$$k^{m+1} = \dots$$

$$l^{m+1} = k^{m+1} + (m+1)r.k^m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.k^{m-1} + \dots + (m+1)r^m.k + r^{m+1}.$$

On a de même :

$$(l+r)^{m+1} = l^{m+1} + (m+1)r.l^m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.l^{m-1} + \dots + (m+1)r^m.l + r^{m+1}.$$

En ajoutant membre à membre ces équations, il vient après toutes réductions faites :

$$(l+r)^{m+1} = a^{m+1} + (m+1)r.s_m + \frac{(m+1)m}{1.2}r^2.s_{m-1} + \dots + (m+1)r^m.s_1 + r^{m+1}m.$$

De cette équation on tire :

$$s_m = \frac{(l+r)^{m+1}.a^{-m+1}}{(m+1).r} - \frac{m}{1.2}r.s_{m-1} - \frac{(m-1)m}{1.2.3}r^2.s_{m-2} - \dots - \frac{r^m m}{m+1}.$$

Telle est la formule cherchée.

Application à la suite naturelle des nombres.

Si l'on considère la progression

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots n.$$

La raison et le premier terme sont l'unité, et le dernier terme exprime le nombre n des termes de la progression ; en sorte que pour la suite naturelle des nombres, la formule s_m obtenue ci-dessus, devient :

$$s_m = \frac{(n+1)^{m+1} - 1}{m+1} - \frac{m}{1 \cdot 2} s_{m-1} - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_{m-2} \dots - s_1 - \frac{s_0}{m+1}.$$

Si dans cette formule, on donne successivement à m , les valeurs 1, 2, 3,..... on trouve :

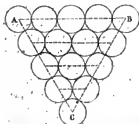
$$s_1 = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$s_2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 3}.$$

$$s_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = s_1^2.$$

Application des formules s_1 et s_2 à la recherche du nombre des boulets contenus dans les piles triangulaire, quadrangulaire et rectangulaire.

Pile triangulaire. — Ayant disposé sur le sol, une série de boulets de



même calibre, de telle sorte que les boulets qui se trouvent sur les bords forment un triangle équilateral; on place entre les vides que laissent ces boulets (tous tangents entre eux), une nouvelle série de boulets.

On obtient ainsi une seconde tranche, laquelle est encore un triangle équilateral dont le côté, a un boulet de moins à sa base.

En continuant ainsi on arrive à ne pouvoir plus placer qu'un seul boulet, et la pile triangulaire se trouve construite.

Appelons n le nombre de boulets contenus dans le côté de la première tranche située sur le sol. Le nombre total de boulets contenus dans cette première tranche est évidemment :

$$1 + 2 + 3 \dots + (n-1) + n = s_1 = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} = \frac{n^2 + n}{2}.$$

ANALYSE.

Si dans cette formule on donne à n les valeurs décroissantes $n - 1$, $n - 2$, ... 3, 2, 1, on obtient pour résultat les nombres de boulets contenus dans la seconde tranche, la troisième tranche, etc..... à partir de la base.

Donc si nous appelons P_{Δ} le nombre total des boulets contenus dans la pile triangulaire, nous aurons :

$$P_{\Delta} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} + \frac{(n-2)^2 + (n-2)}{2} + \dots + \frac{3^2 + 3}{2} + \frac{2^2 + 2}{2} + \frac{1^2 + 1}{2}.$$

Ou bien :

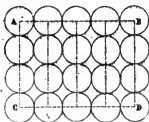
$$P_{\Delta} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3.2} + \frac{n(n+1)}{1.2.2}.$$

Et finalement après toute réduction de calculs :

$$P_{\Delta} = \frac{n(n+1) \cdot (n+2)}{1.2.3}.$$

Pile quadrangulaire. — Dans la pile quadrangulaire, la base est formée par des boulets rangés en carré.

Dans les vides que laissent ces boulets, on place une série de boulets, lesquels forment un nouveau carré, dont le côté a un boulet de moins que celui de la base.

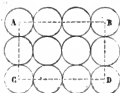


En continuant ainsi, on arrive à ne pouvoir placer qu'un seul boulet, et la pile quadrangulaire se trouve construite. Soit n le nombre de boulets contenus dans le côté de la base, alors le nombre des boulets contenus dans cette base est n^2 , et puisque chaque tranche de la pile est un carré dont le côté contient un boulet

de moins que celui de la tranche précédente, à partir de la base, il en résulte que $P_{\square}$ désignant le nombre total des boulets contenus dans la pile quadrangulaire, on a :

$$P_{\square} = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = s_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}.$$

Pile rectangulaire. — Dans la pile rectangulaire, la base est un rectangle, les tranches successives à partir de cette base, sont aussi des



rectangles dont les deux côtés contiennent chacun et successivement un boulet de moins. La pile se trouve terminée par une file de boulets en ligne droite.

On peut remarquer que dans la pile rectangulaire, il y a autant de tranches horizontales, en y com-

prenant la base et l'arête qui termine la pile, qu'il y a de boulets contenus dans le petit côté de la base.

Ceci posé, soit $p + 1$ le nombre des boulets contenus dans le plus petit côté de la base.

Les côtés de la base contiendront $p + n$ et n boulets.

Ceux de la tranche immédiatement supérieure, contiendront $p + n - 1$ et $n - 1$ boulets.

Et ainsi de suite.

Les côtés de l'avant-dernière tranche contiendront $p + 2$ et 2 boulets.

Enfin, la dernière pile se réduit à une ligne droite contenant $p + 1$ boulets.

Donc si nous désignons par $P_{\square}$ le nombre total des boulets contenus dans la pile rectangulaire, nous aurons :

$$P_{\square} = (p+n)n + (p+n-1)(n-1) + \dots + (p+3) \cdot 3 + (p+2) \cdot 2 + p+1.$$

Ou bien :

$$P_{\square} = n^2 + (n-1)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 + p(n+n-1+\dots+3+2+1) = \\ \Rightarrow s_2 + p \cdot s_1.$$

Et finalement après toutes réductions faites :

$$P_{\square} = \frac{n(n+1) \cdot (2n+3p+1)}{1.2.3}.$$

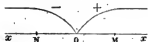
Dans cette formule : n désigne le nombre de boulets contenus dans le plus petit côté de la base, et p désigne le nombre — 1, de boulets contenus dans la pile horizontale qui termine l'arête.

III.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Détermination d'un point sur une ligne droite.

Un point M d'une droite xx' est entièrement déterminé, lorsqu'on connaît sa distance OM à un point fixe O de cette droite, et le sens suivant lequel cette distance OM doit être comptée à partir du point fixe O . Suivant que la distance OM comptée à partir de O ,



est prise dans un sens ou dans l'autre, on l'affecte du signe $+$ ou du signe $-$.

La convention du signe $+$ ou du signe $-$ se rapportant à l'un des deux sens (à droite ou à gauche) est complètement arbitraire.

Pour fixer les idées, nous conviendrons d'appeler *distances positives*, les distances comptées à droite du point fixe O , et nous les affecterons du signe $+$; par suite les distances comptées à gauche du point fixe O seront appelées *distances négatives*, et nous les affecterons du signe $-$.

Ainsi la distance OM , est positive et la distance ON est négative.

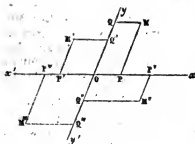
Détermination d'un point, sur un plan, par le moyen des coordonnées rectilignes.

Traçons sur un plan, deux droites xx' et yy' se coupant en O , sous un angle quelconque.

Convenons que les distances comptées à partir du point fixe O , seront : positives, lorsque prises sur xx' , elles seront portées à droite de O et que prises sur yy' , elles seront comptées au-dessus de xx' .

Ces distances seront négatives, lorsqu'elles seront comptées dans les sens inverses.

Ceci posé, soit à déterminer la position d'un point quelconque M du plan. Menons par ce point M , les droites MP et MQ , respectivement parallèles à yy' et à xx' .



Le point M sera entièrement déterminé lorsqu'on connaîtra les nombres positifs ou négatifs qui représentent OP et OQ. Car ces nombres étant connus on en déduira les positions des points P et Q sur les droites xx' et yy' , puis en achevant le parallélogramme OPMQ, on aura le point M.

Définitions. — La longueur OP, prise avec le signe qui lui convient, est appelée l'*abscisse* du point M.

La longueur OQ ou son égale MP, prise avec le signe qui lui convient, est appelée l'*ordonnée* du point M.

L'abscisse et l'ordonnée sont aussi désignées par le nom commun de *coordonnées*.

Ainsi l'on dit : les *coordonnées* du point M sont OP et OQ.

L'abscisse se représente généralement par la lettre x , et l'ordonnée par la lettre y .

Ainsi l'on a, d'après les conventions établies ci-dessus :

Pour le point M $x = +OP$, $y = +OQ = +PM$.

Pour le point M' $x = -OP'$, $y = +OQ' = +P'M'$.

Pour le point M'' $x = +OP''$, $y = -OQ'' = -P''M''$.

Et enfin pour le point M''' $x = -OP'''$, $y = -OQ''' = -P'''M'''$.

Les droites xx' et yy' , prennent le nom d'*axes des coordonnées* ; xx' est dite l'*axe des abscisses* ou l'*axe des x*, et yy' est dite l'*axe des ordonnées* ou l'*axe des y*.

Divers systèmes de coordonnées.

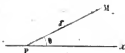
Lorsque deux quantités sont telles, que la connaissance de ces deux quantités permet de fixer la position d'un point sur un plan, on donne à ces quantités le nom de *coordonnées* de ce point.

Les coordonnées définies ci-dessus, sont dites *coordonnées rectilignes*.

Les coordonnées rectilignes sont *rectangles* ou *obliques*, suivant que les axes forment un angle droit ou oblique.

Soit une droite fixe Px tracée sur un plan et soit P un point fixe marqué sur cette droite.

Il est évident qu'un point quelconque M du plan est entièrement dé-



terminé par la connaissance de l'angle MPx et de la distance MP . Ces deux quantités sont dites *coordonnées polaires* du point M .

La coordonnée linéaire MP est dite *le rayon vecteur*; le point fixe P est dit *le pôle*, et la droite fixe Px est désignée par le nom d'*axe polaire*.

On représente le rayon vecteur par r et l'angle variable PMx par θ .

L'angle variable MPx se compte de 0° à l'infini et suivant qu'on le compte dans un sens ou dans l'autre, il est *positif* ou *négatif*. Nous conviendrons de le considérer comme positif lorsqu'il sera décrit de la droite vers la gauche et comme négatif dans le cas contraire.

On admet des *valeurs positives* et des *valeurs négatives* pour le rayon vecteur.

Il existe plusieurs systèmes de coordonnées. Nous ne parlerons que des *coordonnées rectilignes* et des *coordonnées polaires*.

Équation d'une ligne.

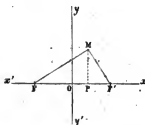
Les lignes considérées en géométrie, sont définies par une propriété commune à leurs différents points; ce sont donc des *lieux géométriques*.

On conçoit qu'une ligne étant ainsi définie, on pourra de sa définition, déduire une relation entre les coordonnées d'un quelconque de ses points.

Cette relation sera évidemment la même, quel que soit le point considéré, puisque la définition est la même pour tous les points de la ligne.

La *relation constante*, qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque d'une ligne, est dite *l'équation de cette ligne*.

PROBLÈME I. — Une ligne étant définie, trouver son équation.



Soit par exemple à trouver l'équation de l'ellipse.

Soient F et F' les deux foyers de la courbe; appelons $2a$ la longueur de son grand axe, alors pour un point M de cette courbe on a :

$$MF + MF' = 2a \dots (1)$$

Désignons FF' par $2c$:

Prenons la droite FF' pour axe des x et sur le milieu O de cette droite FF' , élevons une perpendiculaire yy' que nous prendrons pour axe des y .

Par ce choix des axes et d'après la nature de la question, on voit que le lien cherché est symétrique par rapport aux lignes xx' et yy' .

En abaissant MP perpendiculaire sur xx' , MP et OP seront l'y et l' x du point M.

Nous avons à chercher la relation qui existe entre x et y .

A cet effet, les triangles rectangles MFP et MF'P donnent :

$$(2) \dots \overline{MF}^2 = y^2 + (c + x)^2,$$

$$(3) \dots \overline{MF'}^2 = y^2 + (c - x)^2.$$

En retranchant la seconde équation de la première, il vient puisque $MF + MF' = 2a$

$$2a (MF - MF') = 4cx.$$

D'où l'on tire :

$$MF - MF' = \frac{2cx}{a}.$$

Cette dernière équation combinée avec l'équation (1) nous donne :

$$MF = a + \frac{cx}{a}, \quad MF' = a - \frac{cx}{a}.$$

La valeur de MF portée dans (1), conduit à l'équation :

$$\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2 = y^2 + (c - x)^2$$

laquelle devient après toute réduction de calculs :

$$a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2),$$

ou bien, en posant $a^2 - c^2 = b^2$

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

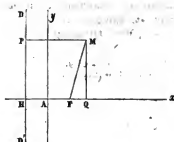
Telle est l'équation du lieu proposé.

Remarque. — Les expressions $MF = a + \frac{cx}{a}$, $MF' = a - \frac{cx}{a}$ font connaître les valeurs des rayons vecteurs d'un même point de la courbe, en fonction de l'abscisse x de ce point.

Les fonctions $a + \frac{cx}{a}$, $a - \frac{cx}{a}$ sont rationnelles et du premier degré.

Équation de la parabole.

Prenons pour axes des x , la perpendiculaire FH abaissée du foyer F sur la directrice DD' et pour axe des y la parallèle Ay menée à la directrice par le sommet A.



Soit A un point de la parabole, alors :

$$MF = MP.$$

Appelons x, y les coordonnées AQ et MQ du point M, et désignons par p le paramètre HF de la courbe.

Sur la figure, on a :

$$MP = x + \frac{p}{2}.$$

$$MF^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2.$$

Et par suite, puisque $MF = MP$, il vient :

$$y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Et après toute réduction de calculs :

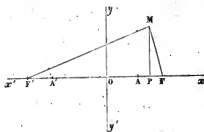
$$y^2 = 2px.$$

Telle est l'équation de la parabole, rapportée à son axe et à sa tangente au sommet.

Remarque. — L'expression $MF = MP = x + \frac{p}{2}$ fait connaître la valeur du rayon vecteur d'un point de la courbe en fonction de l'abscisse de ce point.

La fonction $x + \frac{p}{2}$ est rationnelle et du premier degré.

Equation de l'hyperbole.



Prenons l'axe AA' pour axe des x et la perpendiculaire Oy élevée au milieu O de FF' et sur FF' pour axe des y .

Soit M, un point de la courbe dont les coordonnées x et y , sont OP et MP.

Nous appellerons $2a$ l'axe AA' et $2c$ la distance fo-

cale FF'.

Le point M appartenant à l'hyperbole, on a :

$$MF' - MF = 2a, \dots \dots (1)$$

Sur la figure on a :

$$\overline{MF'}^2 = y^2 + (c + x)^2, \dots \dots (2)$$

$$\overline{MF}^2 = y^2 + (c - x)^2, \dots \dots (3)$$

Ces équations donnent par soustraction :

$$\overline{MF'}^2 - \overline{MF}^2 = 4cx.$$

Ou bien :

$$(MF' + MF)(MF' - MF) = 4cx.$$

Et à cause de (1)

$$MF' + MF = \frac{2cx}{a}.$$

Cette dernière équation combinée avec (1) donne

$$MF' = \frac{cx}{a} + a, \quad MF = \frac{cx}{a} - a.$$

La substitution de l'une de ces valeurs dans l'une des équations (2) ou (3) conduit à l'équation finale :

$$a^2y^2 - (c^2 - a^2)x^2 = -a^2(c^2 - a^2).$$

D'où, en posant : $c^2 - a^2 = b^2$.

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

Telle est l'équation de l'hyperbole.

Remarque. — Les expressions $MF' = \frac{cx}{a} + a$, $MF = \frac{cx}{a} - a$, sont les valeurs des rayons vecteurs d'un même point de l'hyperbole, en fonction de l'abscisse x de ce point. Ces fonctions sont rationnelles et du premier degré.

PROBLÈME II. — L'équation d'une ligne étant donnée, construire cette ligne.

I. Soit à construire la ligne dont l'équation est :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

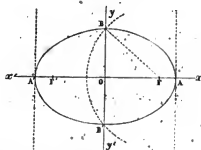
ANALYSE.

Cette équation est celle du lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes F, F' séparés par la longueur $2c$ est constante et égale à $2a$; de plus dans cette équation, b^2 représente la différence $a^2 - c^2$.

Soit $OA = OA' = a$, alors AA' est la constante $2a$.

L'équation :

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$



Résolue par rapport à y , donne

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Sous cette forme, on voit que la valeur variable de y , dépend de la valeur arbitraire donnée à x (on dit alors que y est une fonction d' x).

Pour construire la courbe proposée, nous ferons croître x de 0 à $+\infty$ et de 0 à $-\infty$; nous en conclurons les valeurs correspondantes de y et en construisant les systèmes de valeurs correspondantes de x et de y , nous obtiendrons une série de points, dont la jonction par un trait continu, sera la courbe cherchée.

Pour $x = 0$, $y = \pm b$.

La forme $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ montre que pour $x = 0$, la valeur b correspondante de y , est la valeur maximum de y . Donc si de F' comme centre avec OA (ou a) pour rayon on décrit un cercle, les points B et B' de rencontre de ce cercle avec yy' , sont les points de la courbe les plus élevés au-dessus et au-dessous de l'axe des x ; car

$$OB = OB' = \sqrt{BF'^2 - OF'^2} = \sqrt{OA^2 - OF'^2} = \sqrt{a^2 - c^2} = b.$$

Et de plus, nous venons de reconnaître que b est la valeur maximum de l'ordonnée y .

Pour des valeurs de x , comprises entre 0 et a , l'équation :

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

montre que les ordonnées correspondantes ne cesseront pas d'être réelles et de décroître constamment; c'est-à-dire que de 0 à a , dans l'espace des deux parallèles yy' et $\lambda\lambda'$, il y a une infinité de points de la courbe lesquels partent de B en s'abaissant constamment vers l'axe des x .

Pour $x = a$, $y = 0$. Donc le point A est un point de la courbe.

Pour des valeurs de x plus grandes que a , l'ordonnée $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ ne cesse d'être imaginaire, c'est-à-dire qu'au delà de la parallèle $\lambda\lambda'$ il n'y a pas de points de la courbe.

Nous avons reconnu plus haut que cette courbe est symétrique par rapport aux axes xx' et yy' , ce que confirme encore la forme de son équation,

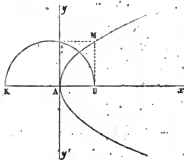
$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

laquelle ne contient que des termes de deuxième degré en x et en y et qui par conséquent ne change pas alors qu'on y remplace x par $-x$ et y par $-y$.

La courbe en question est donc limitée dans tous les sens, car la différence $a^2 - x^2$ ou $b^2 - y^2$ est finie.

II. Soit à construire la courbe dont l'équation est

$$y^2 = 2px.$$



Pour $x = 0$, $y = 0$, la courbe passe par l'origine A des axes lesquels sont supposés rectangulaires. La forme de l'équation montre que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x ; car pour une valeur quelconque de x , on obtient pour y deux valeurs égales et de signes contraires.

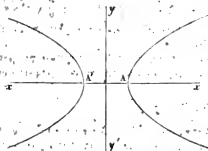
On voit aussi que la courbe ne s'étend pas au delà du point A du côté des x négatifs; en effet pour toute valeur négative de x , l'ordonnée y est imaginaire.

Si l'on donne à x des valeurs positives et croissantes, y ira sans cesse en croissant; la courbe part donc du point A et s'étend vers l'infini symétriquement par rapport à l'axe Ax , ainsi que l'indique la figure.

On peut remarquer que pour chaque point de la courbe, l'ordonnée y est moyenne géométrique entre l'abscisse et le double du paramètre p ; si donc l'on prend sur Ax et à gauche de A une longueur $AK = 2p$, on déterminera un point M de la courbe correspondant à une certaine abscisse AU par la construction indiquée sur la figure.

III. Soit à construire la courbe dont l'équation est :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$



La forme de cette équation montre que la courbe est symétrique par rapport aux axes coordonnés, lesquels sont supposés rectangulaires ; en effet, pour une même valeur de x , on obtient pour y deux valeurs égales et de signes contraires ; de même pour une même valeur de y , on obtient

pour x deux valeurs égales et de signes contraires.

L'axe des x seul rencontre la courbe, pour cette raison on le nomme *axe transverse*.

Pour des valeurs croissantes et réelles de x et plus grandes que a , y ne cesse d'être réel et de croître indéfiniment.

La courbe proposée a la forme indiquée sur la figure, elle se compose de deux branches infinies.

IV. Soit à construire la courbe dont l'équation est :

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 8x + 12}.$$

Pour $x = 0$, on a $y = -\frac{1}{4}$.

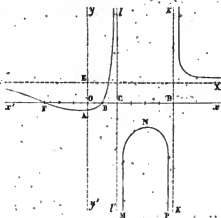
Donc si sur l'axe des y et en dessous de xx' , je prends la longueur $OA = \frac{1}{4}$, j'ai en A un point de la courbe.

En décomposant le numérateur et le dénominateur de l'équation proposée, en facteurs du premier degré, ce qui est possible ici, l'équation proposée devient :

$$y = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x-6)}.$$

Sous cette forme on voit que :

Pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1, l'ordonnée y ne cesse d'être négative et de plus pour $x = 1$, $y = 0$. Donc, si l'on prend sur xx' la longueur $OB = 1$, la courbe part du point A et va au point B en restant au-dessous de l'axe des x .



En donnant à x des valeurs comprises entre 1 et 2, l'ordonnée y devient positive, c'est-à-dire qu'à partir de B la courbe passe au-dessus de l'axe des x . Pour $x = 2$, $y = \infty$; donc si par le point C tel que $OC = 2$, on mène une parallèle ll' à l'axe des y , la courbe dans l'intervalle de $x = 1$ à $x = 2$, part du point B et va rencontrer la parallèle ll' à l'infini, en restant au-dessus de l'axe des x .

Pour des valeurs de x plus grandes que 2 et plus petites que 3, l'ordonnée y devient négative; donc la courbe repasse au-dessous de l'axe des y . Pour $x = 3$, y devient encore infini, donc si je prends sur xx' , la longueur $OD = 3$ et si par D, je mène la parallèle kk' à l'axe des y , dans l'intervalle de $x = 2$ à $x = 3$, la courbe part de l'infini suivant la parallèle ll' et revient à l'infini suivant la parallèle kk' , en restant au-dessous de l'axe des abscisses.

Pour des valeurs de x , plus grandes que 3 et croissant indéfiniment, l'ordonnée y redevient et reste constamment positive. Elle part de l'infini.

Pour savoir quelle limite elle atteint, alors que x tend vers l'infini, nous diviserons haut et bas le second membre de l'équation

$$y = \frac{x^3 + 2x - 3}{x^3 - 8x + 12}$$

par x^2 et en introduisant l'hypothèse $x = \infty$, après cette division, nous trouvons $y = 1$.

Donc si par le point E, distant de 0 d'une longueur $OE = 1$, je mène la parallèle EX à l'axe des x , la courbe au-delà de $x = 6$, part de l'infini suivant la parallèle kk' et va rencontrer à l'infini la parallèle EX, en restant toujours au-dessus de l'axe des x .

Pour obtenir la portion de la courbe, représentée par l'équation

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 8x + 12}$$

et située du côté des x , je remplace x par $-x$ dans cette équation et j'ai ainsi pour l'ordonnée de la courbe située à gauche de yy' :

$$y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 8x + 12}$$

Ou bien :

$$y = \frac{(x+1) \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x+6)}$$

Les valeurs positives données à x , dans cette équation, doivent être portées à gauche de l'origine.

Pour $x = 0$, $y = -\frac{1}{6}$ ce que nous savions.

Pour des valeurs de x comprises entre 0 et 3, l'ordonnée y , ne cesse d'être négative, et puisque pour $x = 3$, $y = 0$ il en résulte que si l'on prend à gauche de l'origine, une distance $OF = 3$, la partie de la courbe située à gauche des y , part du point A et arrive en F en restant au-dessous de l'axe des x ; dans l'intervalle de $x = 0$ à $x = 3$.

Pour des valeurs de x plus grandes que 3 et indéfiniment croissantes, l'ordonnée y redevient positive et puisque pour la limite $x = \infty$, $y = 1$, il s'ensuit qu'à partir de F la courbe passe au-dessus de l'axe des x et va rencontrer à l'infini la parallèle EX.

Ainsi se trouve construite la courbe dont l'équation est :

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 8x + 12}$$

Remarque. — La branche BAF, qui va d'un point B de l'axe des x à un autre point F de ce même axe, a évidemment un point particulier dont l'ordonnée est la plus grande parmi les ordonnées comprises entre les points A et F.

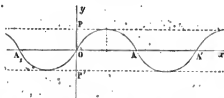
La branche MNP qui va de l'infini à l'infini, au-dessous de l'axe des x , a évidemment un point particulier, dont l'ordonnée est la plus petite

parmi toutes les ordonnées des points de la courbe, situés entre les points extrêmes M et P de cette branche.

Nous étudierons plus tard le moyen de déterminer exactement la position de ces points particuliers dont on soupçonne ici l'existence.

V. Soit à construire la courbe dont l'équation est :

$$y = \sin x.$$



Pour $x = 0$, $y = 0$ la courbe passe donc par l'origine.

Pour toute valeur de x de la forme $x = K\pi$, $y = 0$; donc si l'on partage l'axe des x à partir de l'origine 0 en parties égales à π aux points A, A', A'', A_1, A_1', ..., ces points sont ceux où la courbe rencontre l'axe des x .

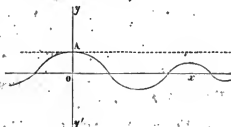
Pour les abscisses comprises entre 0 et A; A' et A'', de deux en deux, les ordonnées sont positives; au contraire les ordonnées sont négatives de deux en deux à partir des abscisses comprises entre A et A'.

La valeur maximum de l'ordonnée est l'unité; elle correspond à $x = K\frac{\pi}{2}$.

Donc si $0 = OP = 1$, la courbe a la forme indiquée sur la figure.

VI. Soit à construire la courbe dont l'équation est :

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$



Cette courbe ne part pas de l'origine 0, elle rencontre l'axe des y au point A, tel que $OA = 1$.

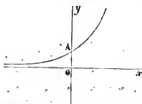
Comme la courbe précédente, celle-ci rencontre l'axe des x aux points dont les abscisses sont $x = K\pi$.

Les parties de cette courbe, situées au-dessus et au-dessous de l'axe des x sont inégales et vont sans cesse en se rapprochant de l'axe des x .

La valeur maximum de l'ordonnée est $OA = 1$; cette valeur maximum ne se présente qu'une seule fois et à l'origine.

VII. Soit à construire la courbe dont l'équation est :

$$y = a^x.$$



Supposons $a > 1$; pour $x = 0$, $y = 1$, si donc l'on prend $OA = 1$ on a en A un point de la courbe.

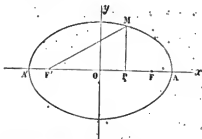
Pour des valeurs positives et croissantes de x , y va sans cesse en croissant et pour $x = \infty$, $y = \infty$.

Pour des valeurs négatives et croissantes en valeur absolue, y va constamment en diminuant pour $x = -\infty$, $y = 0$.

La courbe rencontre l'axe des x à l'infini; elle a la forme ci-contre.

Si $a < 1$, on trouve la même courbe placée d'une manière différente.

Équation polaire de l'ellipse.



Soit M un point quelconque de l'ellipse, prenons l'axe A'A pour axe polaire et le foyer F' pour pôle.

Alors les coordonnées polaires du point M sont :

$$MF' = r \quad \text{angle } MF'x = \theta.$$

Ceci posé, le triangle

rectangle MF'P nous donne :

$$F'P \text{ ou } (x + c) = r \cos \theta.$$

Et puisqu'on a trouvé plus haut :

$$MF' = a + \frac{cx}{a}.$$

On a par substitution les calculs suivants :

$$r = a + \frac{c(r \cos \theta - c)}{a},$$

$$r = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \theta} = \frac{b^2}{a - c \cos \theta} = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a} \cos \theta}.$$

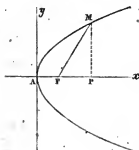
Et en représentant $\frac{b^2}{a}$ par p et $\frac{c}{a}$ par e , il vient :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

Telle est l'équation polaire de l'ellipse.

Dans cette équation, e est < 1 .

Équation polaire de la parabole.



Prenons l'axe Ax pour axe polaire et le foyer F pour pôle, alors M étant un point quelconque de la courbe, les coordonnées polaires de ce point sont

$MF = r$, angle $MFx = \theta$.

Le triangle rectangle MFP donne :

$$FP \text{ ou } \left(x - \frac{p}{2}\right) = r \cos \theta.$$

Et puisqu'on a trouvé :

$$MF = x + \frac{p}{2}.$$

On a par substitution les calculs suivants :

$$r = \frac{p}{2} + r \cos \theta + \frac{p}{2}.$$

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}.$$

Telle est l'équation polaire de la parabole.

Equation polaire de l'hyperbole.

En suivant la même marche, on trouve pour équation polaire de l'hyperbole, l'équation :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}.$$

Dans laquelle p représente le rapport $\frac{b^2}{a}$ et e le rapport $\frac{c}{a}$.

Dans cette équation le rapport e est > 1 .

Remarque. — Des trois équations polaires que nous venons de trouver, il résulte que l'équation générale :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

représente l'ellipse, ou la parabole, ou l'hyperbole suivant que le nombre e est < 1 , ou $= 1$ ou > 1 .

De la transformation des coordonnées.

Dans l'étude des lieux géométriques, il est souvent utile de changer les axes coordonnés, considérés d'abord, et de rapporter tous les points du lieu à d'autres axes, soit pour simplifier les équations, soit pour chercher à découvrir plus aisément les propriétés des figures.

La transformation des coordonnées a pour objet la recherche des formules par lesquelles on exprime les coordonnées qui se rapportent à deux axes, en fonction des coordonnées relatives à deux autres axes.

Changements d'origine.

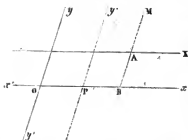
Proposons-nous d'abord de déterminer les formules propres à passer

d'un système d'axes coordonnés au système obtenu, en transposant les premiers axes parallèlement à eux-mêmes, en un point déterminé.

Soient yy' et xx' les axes primitifs.

Par un point O' déterminé par ses coordonnées $x = OP$ et $y = O'P$, que nous désignerons par a et b , menons des parallèles $O'X$ et $O'y$ aux axes xx' et yy' .

Considérons ces parallèles comme de nouveaux axes.



Soit M un point de plan, ce point rapporté aux axes primitifs xx' et yy' a pour coordonnées :

$$x = OR, \quad y = MB.$$

Ce même point rapporté aux nouveaux axes XO' et YO' a pour coordonnées

$$X = O'A, \quad Y = MA.$$

La question est d'exprimer les anciennes coordonnées x, y en fonction des nouvelles X, Y et des coordonnées a, b de la nouvelle origine.

Or, sur la figure, on a :

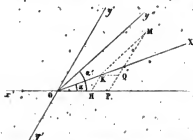
$$x = OP + PB, \quad y = AB + MA.$$

D'où :

$$x = a + X, \quad y = b + Y.$$

Telles sont les formules cherchées.

Passer d'un système d'axes obliques à un autre système d'axes obliques, sans changer d'origine.



Soient yy' et xx' les axes primitifs, appelons α l'angle yOx qu'ils forment entre eux.

Soient YO et XO les nouveaux axes; appelons α et α' les angles XOx et YOx que forment ces nouveaux axes avec l'ancien axe des x . La connaissance de ces angles est nécessaire et suffisante pour la détermination des nouveaux axes.

Un point quelconque M du plan rapporté aux axes primitifs yy' et xx' a pour coordonnées

$$x = OP, \quad y = MP.$$

Ce même point rapporté aux nouveaux axes OX et OY a pour coordonnées :

$$X = OK, \quad Y = MK.$$

Il s'agit d'exprimer x et y en fonction de X, Y et des données b, α et α' .

A cet effet, menons par le point K les parallèles KQ et KH aux anciens axes.

Sur la figure, on a :

$$(1) \dots\dots\dots x = OH + KQ.$$

$$(2) \dots\dots\dots y = KH + MQ.$$

Le triangle OHK donne :

$$\frac{OH}{X} = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta} \dots\dots\dots \text{d'où } OH = \frac{X \sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}.$$

$$\frac{KH}{X} = \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \dots\dots\dots \text{d'où } KH = \frac{X \sin \alpha}{\sin \theta}.$$

Le triangle MKQ donne, semblablement :

$$\frac{MQ}{Y} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \theta} \dots\dots\dots \text{d'où } MQ = \frac{Y \sin \alpha'}{\sin \theta}.$$

$$\frac{KQ}{Y} = \frac{\sin(\theta - \alpha')}{\sin \theta} \dots\dots\dots \text{d'où } KQ = \frac{Y \sin(\theta - \alpha')}{\sin \theta}.$$

Les formules (1) et (2) deviennent donc par substitution :

$$x = \frac{X \sin(\theta - \alpha) + Y \sin(\theta - \alpha')}{\sin \theta}.$$

$$y = \frac{X \sin \alpha + Y \sin \alpha'}{\sin \theta}.$$

Si les nouveaux axes sont rectangulaires, la différence $\alpha' - \alpha = 90^\circ$, en sorte que l'on a $\alpha' = 90^\circ + \alpha$ et les formules écrites ci-dessus deviennent après toutes réductions de calculs :

$$x = \frac{X \sin(\theta - \alpha) - Y \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta}.$$

$$y = \frac{X \sin \alpha + Y \cos \alpha}{\sin \theta}.$$

Telles sont les formules cherchées.

Passer d'un système d'axes rectangulaires à un système d'axes obliques, sans changer d'origine.

Si les axes primitifs sont rectangulaires $\theta = 90^\circ$ et les formules générales

$$x = \frac{X \sin (\theta - \alpha) + Y \sin (\theta - \alpha')}{\sin \theta},$$

$$y = \frac{X \sin \alpha + Y \sin \alpha'}{\sin \theta}$$

deviennent :

$$x = X \cos \alpha + Y \cos \alpha',$$

$$y = X \sin \alpha + Y \sin \alpha'.$$

Telles sont les formules cherchées.

Passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, sans changer d'origine.

Reprenons les formules

$$x = \frac{X \sin (\theta - \alpha) + Y \cos (\theta - \alpha)}{\sin \theta},$$

$$y = \frac{X \sin \alpha + Y \cos \alpha}{\sin \theta},$$

qui servent à passer d'un système d'axes obliques à un système d'axes rectangulaires.

Si les premiers axes sont eux-mêmes rectangulaires $\theta = 90^\circ$ et l'on obtient pour les formules cherchées :

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha,$$

$$y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha.$$

Remarque. — Les formules de transformation que nous venons de trouver sont toutes des fonctions du premier degré des anciennes et des nouvelles coordonnées.

GÉNÉRALITÉS.

Classification des lignes.

Une ligne est dite *algébrique* ou *transcendante*, suivant que son équation est elle-même algébrique ou transcendante.

Les lignes algébriques sont naturellement classées d'après le degré de leur équation en coordonnées rectilignes. Ainsi, une ligne est dite du 1^{er}, du 2^e, ..., degré suivant que son équation est du 1^{er}, du 2^e, ... degré.

Le degré d'une équation d'une ligne, ne change pas alors qu'on rapporte cette ligne à de nouveaux axes.

En effet, soit $f(x, y) = 0$ l'équation d'une ligne rapportée à de certains axes ; si je rapporte cette ligne à de nouveaux axes, je remplacerai dans $f(x, y) = 0$, x et y par des fonctions des nouvelles coordonnées, lesquelles fonctions seront du premier degré. Donc, après cette substitution, le degré de $f(x, y) = 0$ n'a pu être augmenté. Je dis qu'il ne saurait être diminué, car en passant réciproquement des nouveaux axes aux anciens, le degré de l'équation viendrait à être augmenté. Ce qui ne peut être.

Donc, le degré de l'équation d'une ligne reste le même après la transformation des coordonnées.

Remarque. — L'équation générale d'un certain degré, comprend les lignes dont l'ordre est indiqué par ce degré et toutes celles d'un ordre inférieur.

Ainsi l'équation du 2^e degré

$$(y - ax - b)(y' - a'x - b') = 0,$$

se trouve vérifiée par $y - ax - b = 0$ et $y - a'x - b' = 0$, elle représente donc les deux lignes du premier degré par les équations

$$y - ax - b = 0, \quad y - a'x - b' = 0.$$

Du caractère auquel on reconnaît qu'un point est sur une courbe dont l'équation est donnée.

Soit $f(x, y) = 0$, l'équation d'une courbe et soient x et y les coordonnées d'un point ; l'équation $f(x, y) = 0$ représentant la relation qui existe entre les coordonnées d'un quelconque des points de la courbe, il en résulte que si le point (a, b) est sur la courbe, les coordonnées a et b de ce point devront satisfaire à l'équation $f(x, y) = 0$; donc suivant que la relation

$$f(a, b) = 0$$

sera ou ne sera pas satisfaite, le point dont les coordonnées sont a et b sera ou ne sera pas sur la courbe.

Détermination des coordonnées du point commun à deux courbes données par leurs équations.

Soient :

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0,$$

les équations de deux courbes.

Appelons a et b les coordonnées d'un point commun à ces deux courbes ; alors nous aurons :

$$f(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad F(a, b) = 0.$$

Donc les coordonnées des points communs à leurs courbes sont les valeurs de x et de y , obtenues en résolvant les équations de ces courbes.

Une ligne du degré m ne peut être rencontrée par une ligne droite en plus de m points.

En effet, prenons pour axe des x la droite dont il s'agit. L'équation de l'axe des x est évidemment $y = 0$, si donc je remplace dans l'équation proposée (supposée du degré m), y par 0, l'équation $F(x) = 0$ à laquelle j'arriverai, aura pour racines réelles, les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite. Or cette équation $F(x) = 0$ est au plus du degré m , elle a donc au plus m racines réelles.

Donc, la droite ne pourra rencontrer la courbe en plus de m points.

Remarque I. — Il pourrait se faire que la substitution $y = 0$ donnât lieu à l'identité $0 = 0$. Cela tiendrait à ce que dans l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe, on pourrait mettre y en facteur commun, en sorte que, après la mise de y en facteur commun, on aura :

$$f(x, y) = y \cdot \varphi(x, y)$$

La fonction $\varphi(x, y)$ étant du degré $m - 1$.

L'équation

$$f(x, y) = y \cdot \varphi(x, y) = 0$$

donnerait donc lieu aux équations

$$y = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

C'est-à-dire que l'équation proposée $f(x, y) = 0$ représenterait dans ce cas l'axe des x et une courbe du degré $m - 1$.

Remarque II. — Il résulte de ce principe que les lignes du premier degré ne peuvent être rencontrées par une droite qu'en un seul point.

Donc, les lignes du premier degré sont des lignes droites.

Distance de deux points en coordonnées rectilignes.

Soient x', y' et x'', y'' les coordonnées de deux points M' et M'' , rapportés à deux axes quelconques, dont l'angle est θ .

Après avoir effectué les constructions indiquées sur la figure, le triangle $M'M''$ donne :

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{M'U}^2 + \overline{M''U}^2 + 2\overline{M'U} \cdot \overline{M''U} \cos M'U.$$

Où bien :

$$\overline{M'M''}^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2 + 2(x' - x'')(y' - y'')\cos\theta.$$

Telle est l'expression de la distance cherchée.

Cette formule convient à toutes les positions des deux points.

Dans le cas où les axes sont rectangulaires, $\theta = 90^\circ$, et cette formule devient :

$$\overline{M'M''}^2 = (y' - y'')^2 + (x' - x'')^2.$$

Si l'un des points donnés M'' se confond avec l'origine, on a :

$$\overline{M'M'}^2 = y'^2 + x'^2 + 2x'y'\cos\theta,$$

lorsque les axes sont obliques.

et..... $\overline{M'M'}^2 = y'^2 + x'^2$

lorsque les axes sont rectangulaires.

Équation du cercle. — α et β étant les coordonnées rectangulaires du centre d'un cercle dont le rayon est R ; et x , y étant les coordonnées d'un point de ce cercle, on a, d'après les formules de la distance des points :

$$(y - \beta)^2 + (x - \alpha)^2 = R^2.$$

Telle est l'équation du cercle si les axes rectangulaires ont pour origine le centre; alors $\alpha = 0$, $\beta = 0$, et l'équation du cercle est dans ce cas :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

ÉTUDE DE LA LIGNE DROITE.

L'équation générale du premier degré à deux variables est :

$$Ay + Bx + c = 0.$$

Nous savions déjà que cette équation ne peut représenter qu'une ligne droite. Établissons directement ce principe en discutant cette équation :

Si $A = 0$, l'équation devient :

$$Bx + c = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -\frac{c}{B}.$$

$x = -\frac{c}{B}$ représente évidemment une parallèle à l'axe des y , me-

née à une distance comptée sur l'axe des x , à partir de l'origine et égale

$$\text{à } -\frac{C}{B}.$$

Si $B=0$, l'équation générale devient :

$$Ay + C = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{C}{A}.$$

$y = -\frac{C}{A}$ représente évidemment une parallèle à l'axe des x , menée à une distance comptée sur l'axe des y à partir de l'origine et égale à $-\frac{C}{A}$.

Si $A=0$ et $C=0$, l'équation générale devient :

$$Bx = 0, \quad \text{d'où} \quad x = 0.$$

$x = 0$ représente l'axe des y .

Si $B=0$ et $C=0$, l'équation générale devient :

$$Ay = 0, \quad \text{d'où} \quad y = 0.$$

$y = 0$ représente l'axe des x .

Si $C=0$, l'équation générale devient :

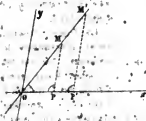
$$Ay + Bx = 0, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{B}{A}x.$$

Ou plus simplement, $y = ax$, en représentant par a le rapport $-\frac{B}{A}$.

Cherchons à construire le lieu de l'équation $y = ax$, laquelle montre que dans ce lieu : *le rapport de l'ordonnée à l'abscisse est constant*, car

$$\frac{y}{x} = a.$$

Pour $x = 0$, on a $y = 0$, donc le lieu cherché passe par l'origine 0 des coordonnées.



Supposons que M et M' soient deux points de ce lieu, déterminés en donnant à x des valeurs particulières OP et OP' .

Les coordonnées de ces points étant MP et OP ; $M'P'$ et OP' , on a :

$$MP = a.OP, \quad M'P' = a.OP'.$$

Et par suite :

$$\frac{MP}{OP} = a, \quad \frac{M'P'}{OP'} = a.$$

Donc, si l'on joint OM et OM' , on forme deux triangles MOP , $M'OP'$ semblables, puisqu'ils ont un angle égal $MPO = M'P'O$ compris entre côtés proportionnels. Donc les angles MOP , $M'OP'$ sont égaux, et par suite les points O , M et M' sont en ligne droite.

Donc l'équation $y = ax$ représente une ligne droite qui passe par l'origine.

Enfin, supposons qu'aucun des coefficients de l'équation $Ay + Bx + C = 0$ ne soit nul. De cette équation on tire :

$$y = -\frac{B}{A}x - \frac{C}{A}.$$

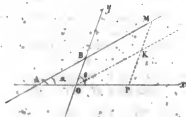
Et plus simplement, en posant $-\frac{B}{A} = a$, $-\frac{C}{A} = b$.

$$y = ax + b.$$

En comparant cette équation à l'équation $y = ax$, on voit que ces deux équations ne diffèrent que par la constante b . Donc, si l'on augmente les ordonnées des divers points de la droite $y = ax$ de la constante b , on obtiendra les ordonnées du lieu de l'équation $y = ax + b$. Le lieu des extrémités de ces nouvelles ordonnées, lequel est une parallèle à la droite $y = ax$, menée à une distance de l'origine comptée sur l'axe des y et égale à b , est donc le lieu de l'équation $y = ax + b$.

Donc, alors qu'aucun des coefficients de l'équation générale du premier degré à deux variables n'est nul, cette équation représente une ligne droite située d'une manière quelconque par rapport aux axes.

Réciproquement. — L'équation d'une ligne droite quelconque est du premier degré.



En effet, soit une droite AB ; traçons sur le plan deux axes quelconques yO , OX dont l'angle est θ .

La droite AB sera entièrement déterminée lorsqu'on connaîtra l'un de ses points (le point B par exemple), et l'angle BAX qu'elle fait avec l'axe des x . Appelons α cet

angle, et soit b la distance OB laquelle fixe la position du point B .

Prenons un point quelconque M sur la droite et cherchons la relation qui existe entre les coordonnées $x = OP$ et $y = MP$ de ce point.

A cet effet, menons par l'origine la parallèle OK à AB, dès lors sur la figure, on a :

$$MP = PK + MK, \text{ d'où } y = PK + b \dots (1)$$

Le triangle OPK donne :

$$\frac{PK}{OP} = \frac{\sin KOP}{\sin OKP}, \text{ ou bien } \frac{PK}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)}$$

Et par suite :

$$PK = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} \cdot x$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} \cdot x + b$$

Cette équation qui est celle de la droite AB est du premier degré entre x et y .

Remarque. — L'équation

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} x + b,$$

montre que si l'équation d'une droite est mise sous la forme $y = ax + b$, le coefficient a de x est une fonction de l'inclinaison α de la droite sur l'axe des x . Ce coefficient a , prend pour cette raison le nom de *coefficient angulaire de la droite*.

Alors que les axes sont rectangulaires $\theta = 90^\circ$ et $a = \operatorname{tg} \alpha$; c'est-à-dire que dans ce cas : le coefficient de x dans l'équation $y = ax + b$, représente la tangente trigonométrique de l'angle que la droite fait avec l'axe des x .

Le coefficient b , qui représente l'ordonnée du point de rencontre de droite avec l'axe des y , est dit le *coefficient linéaire de la droite*.

Les distances OA et OB comptées sur les axes et depuis l'origine jusqu'aux points de rencontre A et B de la droite avec ces axes sont dites : *les coordonnées à l'origine de la droite*.

La connaissance de ces coordonnées, détermine la position des deux points A et B, et par suite, la droite AB se trouve entièrement déterminée.

Expression de l'équation d'une droite en fonction de ses coordonnées à l'origine.



Soit une droite AB dont les coordonnées à l'origine sont OB et OA; appelons m et n ces quantités.

Soient MP et OP les coordonnées x et y d'un point quelconque de la droite.

Le triangle AOB donne :

$$\frac{y}{n} = \frac{m - x}{m}$$

D'où

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1$$

Telle est l'expression de l'équation d'une droite en fonction de ses coordonnées à l'origine.

Remarque. — L'équation d'une droite étant donnée, soit $y = ax + b$ cette équation; les coordonnées à l'origine de cette droite sont l'abscisse et l'ordonnée de ses points de rencontre avec l'axe des x et avec l'axe des y dont les équations sont $y = 0$ et $x = 0$.

Ces coordonnées ont donc pour valeurs :

$$m = -\frac{b}{a} \quad n = b.$$

Les valeurs de a et de b , tirées de ces deux équations et portées dans l'équation $y = ax + b$ de la droite, donnent l'équation :

$$\frac{y}{n} + \frac{x}{m} = 1,$$

trouvée ci-dessus.

PROBLÈME. — *L'équation d'une droite étant donnée, calculer l'angle qu'elle fait avec l'axe des x .*

Soit $y = ax + b$ l'équation d'une droite.

En désignant par α l'angle inconnu que cette droite fait avec l'axe des x , et par ϵ l'angle des axes, on a :

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\epsilon - \alpha)}$$

De cette équation on tire :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cdot \cos \theta} \dots \dots (1)$$

Telle est la formule cherchée.

Si les axes sont rectangulaires (1) devient $\operatorname{tg} \alpha = a$, résultat déjà connu.

Du calcul numérique de l'angle α .

La formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cdot \cos \theta}$$

n'est pas commode pour le calcul numérique de l'angle α .

Reprenons la relation

$$\frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} = a.$$

On en tire :

$$\frac{\sin (\theta - \alpha) - \sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha) + \sin \alpha} = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Et par suite :

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right)}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - a}{1 + a}.$$

D'où :

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} - \alpha \right) = \left(\frac{1 - a}{1 + a} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Cette formule permet de calculer l'angle α , au moyen des logarithmes.

Remarque sur la manière de compter l'angle α .

L'angle α de la formule (1) est l'angle formé par la direction des abscisses positives avec celle des deux directions de la droite donnée qui s'étend du côté des ordonnées positives.

Cet angle varie de 0° à 180° .

Trouver l'équation d'une droite qui passe par un point donné (x', y') .

Ce problème est évidemment indéterminé.

L'équation de la droite cherchée doit être de la forme $y = ax + b$; a et b sont ici les inconnues de la question.

Le point $x'y'$ devant être sur la droite, nous aurons :

$$y' = ax' + b.$$

Telle est la seule équation que donne l'énoncé, elle contient les deux inconnues a et b , elle montre bien l'indétermination du problème. Cette équation donne

$$b = y' - ax'.$$

Et en portant cette valeur dans l'équation $y = ax + b$ cherchée de droite, on trouve :

$$y - y' = a(x - x').$$

Telle est l'équation demandée. Le coefficient angulaire a de la droite y est indéterminé :

On pourrait de même avoir une équation ne contenant que b .

Trouver l'équation de la droite qui passe par deux points donnés $x'y'$ et $x''y''$.

D'après le problème précédent, la droite cherchée devant passer par le point x', y' , son équation sera de la forme :

$$y - y' = a(x - x') \dots \dots \dots (1)$$

Et puisque la droite doit contenir le second point x'', y'' , on aura la relation :

$$y'' - y' = a(x'' - x').$$

La valeur de a tirée de cette équation et portée dans l'équation (1) donne :

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot (x - x').$$

Telle est l'équation de la droite cherchée.

Remarque. — Si l'on suppose l'un des points, situé sur l'axe des x , ($x' = n, y' = 0$) et le second situé sur l'axe des y ($y'' = m, x'' = 0$) : l'équation obtenue ci-dessus devient $\frac{y}{m} + \frac{x}{n} = 1$. Équation déjà connue

Déterminer le point d'intersection de deux droites données par leurs équations.

Soient $y = ax + b, y = a'x + b'$ les équations de deux droites. Les coordonnées de leur point de rencontre doivent satisfaire à la fois à ces deux équations, car le point est commun à chacune de ces droites.

Donc, pour obtenir les coordonnées X et Y de ce point d'intersection, il faut déterminer les valeurs de x et de y communes aux deux équations $y = ax + b$, $y = a'x + b'$, c'est-à-dire qu'il faut résoudre ces deux équations.

On trouve ainsi :

$$X = \frac{b - b'}{a - a'}, \quad Y = \frac{ba' - ab'}{a' - a},$$

pour les coordonnées du point cherché.

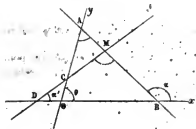
Remarque. — Si les droites sont parallèles leur point de rencontre est à l'infini. Alors $X = \infty$, $Y = \infty$, ce qui exige que $a = a'$.

L'équation $a = a'$ est donc la condition de parallélisme de deux droites dont les équations sont :

$$y = ax + b, \quad y = a'x + b'.$$

La condition de parallélisme de deux droites est donc indépendante des coefficients linéaires de leurs équations.

Calculer l'angle de deux droites données par leurs équations.



Soient $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ les équations de deux droites AC appelons α et α' les angles que font ces droites avec l'axe des x , et M l'angle inconnu qu'elles forment entre elles.

Sur la figure, on a :

$$M = \alpha - \alpha'.$$

d'où :

$$\operatorname{tg} M = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} \dots \dots \dots$$

Mais

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{a' \sin \theta}{1 + a' \cos \theta}$$

La substitution de ces valeurs dans (1) donne après toutes réductions de calcul :

$$\operatorname{tg} M = \frac{(a - a') \sin \theta}{1 + (a + a') \cos \theta + aa'}.$$

Telle est la formule qui fera connaître l'angle cherché M .

Si les axes sont rectangulaires, cette formule devient :

$$\operatorname{tg} M = \frac{a - a'}{1 + aa'}.$$

Condition de parallélisme de deux droites.

Si les deux droites sont parallèles, $M = 0$, $\operatorname{tg} M = 0$ et alors on trouve indépendamment de l'inclinaison des axes

$$a = a'.$$

Condition de perpendicularité de droites.

Si les deux droites sont perpendiculaires $M = 90^\circ$, $\operatorname{tg} M = \infty$ et l'on trouve lorsque les axes sont obliques

$$1 + (a + a') \cos \theta + aa' = 0.$$

Et si les axes sont rectangulaires.

$$1 + aa' = 0.$$

Ce sont là les conditions de perpendicularité de deux droites, suivant que les axes sont obliques ou rectangulaires.

Remarque. — L'équation d'une droite qui, passant par un point donné, serait perpendiculaire à une droite donnée $y = ax + b$, serait :

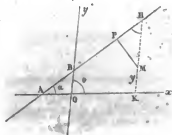
$$y - y' = -\frac{1 + a \cos \theta}{a + \cos \theta} (x - x'),$$

si les axes sont obliques ; ou

$$y - y' = -\frac{1}{a} (x - x'),$$

si les axes sont rectangulaires.

Déterminer la distance d'un point $(x' y')$ à une droite donnée $y = ax + b$.



1° Les axes sont obliques.

Soit AB la droite donnée dont l'équation est $y = ax + b$; soit M le point donné dont les coordonnées sont $x' = OK$ et $y' = MK$.

Appelons d la distance cherchée MP ; le triangle rec-

tangle MPH donne :

$$f = MH \sin (\theta - \alpha) = (HK - y') \sin (\theta - \alpha).$$

Or, HK = ordonnée de la droite $y = ax + b$ correspondante à l'abscisse OK ou x' ; donc : $HK = ax' + b$; par suite :

$$(1) \dots \dots f = (ax' + b - y') \sin (\theta - \alpha).$$

Pour calculer $\sin (\theta - \alpha)$ on a :

$$a = \frac{\sin \alpha}{\sin (\theta - \alpha)} \quad \text{d'où} \quad \sin (\theta - \alpha) = \frac{\sin \alpha}{a}.$$

De plus :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}.$$

par suite ::

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a \sin \theta}{\pm \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}.$$

L'équation (1) donne donc par substitution :

$$f = \frac{(ax' + b - y') \sin \theta}{\pm \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}.$$

Ou bien :

$$f = \frac{(y' - ax' - b) \sin \theta}{\pm \sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \theta}}.$$

Telle est la formule cherchée.

Remarque. — f étant une valeur absolue, on prendra le signe — ou le signe + du radical, de telle sorte que la valeur de f soit positive.

Le numérateur est positif ou négatif, suivant que le point donné M est au dessus ou au-dessous du point H.

2° *Les axes sont rectangulaires.* — Si les axes sont rectangulaires, $\theta = 90^\circ$, et la formule obtenue ci-dessus devient :

$$f = \frac{y' - ax' - b}{\pm \sqrt{1 + a^2}}.$$

On peut obtenir cette formule, directement sur la figure.

EXERCICES SUR LA LIGNE DROITE.

1. — Déterminer les côtés, les angles, les hauteurs, les bissectrices, les médianes et la surface du triangle formé par les droites dont les

ANALYSE.

R

équations sont :

$$y = 2x - 2, \quad y = x + 2, \quad y = 3x - 4.$$

Les axes sont supposés rectangulaires.

2. — Déterminer le lieu des points dont la somme des distances à deux droites données est égale à une longueur donnée m . (On prendra pour axes les deux droites données.)

3. — Dans un triangle BAC, on mène une série de droites telles que MN parallèles à la base, on joint BN et MC. Déterminer le lieu des points tels que P. (On prendra pour axes les côtés AB et AC.)

4. — Démontrer que dans un triangle quelconque, les trois hauteurs se coupent en un même point. On prendra pour axe des x l'un des côtés et pour axe des y la hauteur abaissée sur ce côté.)

5. — Démontrer que dans un triangle, les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés se coupent en un même point. (On prendra pour axe des x , l'un des côtés et pour axe des y , la perpendiculaire élevée sur le milieu de ce côté.)

6. — Démontrer que dans un triangle, les médianes se coupent en un même point. (On prendra pour axe des x , l'un des côtés et pour axe des y , la médiane qui part du milieu de ce côté.)

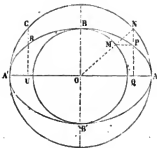
7. — Démontrer que dans un triangle, les bissectrices se coupent en un même point. (On prendra pour axe des x , l'un des côtés et pour axe des y , la hauteur abaissée sur ce côté.)

8. — Démontrer que dans un triangle, le centre du cercle circonscrit, le point de rencontre des hauteurs et le point de rencontre des médianes sont en ligne droite.

DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'ELLIPSE.

Construction de l'ellipse par points, connaissant les axes de cette courbe.

Premier procédé. — Soient AA' et BB' les deux axes $2a$ et $2b$ d'une ellipse,



Sur ces lignes comme diamètres, décrivons des circonférences. Par le centre commun O, menons un rayon quelconque OMN, ce rayon coupe les deux cercles en M et en N.

Par ces points menons les parallèles MP et NQ aux axes, le point P de rencontre de ces parallèles est un point de l'ellipse ayant pour axes AA' et BB'.

En effet, les coordonnées du point P sont $y = PQ$, $x = OQ$ et les triangles semblables MNP, ONQ donnent

$$\frac{PQ}{NQ} = \frac{OM}{ON}, \quad \text{d'où : } \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

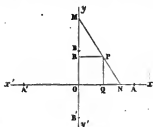
Et par suite :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Le point P est donc un point de l'ellipse et par cette construction, on obtiendra autant de points de la courbe que l'on voudra.

Remarque. — Le rapport des ordonnées PQ et NQ de l'ellipse et du cercle, correspondantes à une même abscisse est constant. Ce fait résulte de la construction. Donc, si l'on mène une ordonnée quelconque CU du cercle et si on la divise en un point R tel que $\frac{RU}{CU} = \frac{b}{a}$, on aura en R un point de l'ellipse ayant pour axes $2a$ et $2b$.

En d'autres termes, si l'on augmente ou si l'on diminue proportionnellement les ordonnées d'un cercle on obtient une ellipse.



Deuxième procédé. — Soient AA' et BB' les deux axes $2a$ et $2b$ d'une ellipse.

Imaginons une droite MN de longueur $a + b$, laquelle s'appuie constamment sur les directions des axes, le point M étant toujours sur Oy et le point N étant toujours sur Ox.

Soit, sur cette droite MN, un point P tel que

$$PN = b, \quad PM = a.$$

Je dis qu'alors que MN glisse entre les deux droites rectangulaires yy' et xx' , le point P décrit l'ellipse dont les axes sont AA' et BB'.

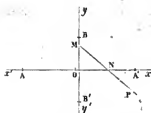
En effet, menons les parallèles PQ et PR aux axes; les coordonnées de P sont $x = OQ$, $y = PQ$ et les triangles semblables PQN et MRP nous donnent :

$$\frac{PQ}{MR} = \frac{PN}{MP}, \quad \text{d'où } \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

Et par suite :

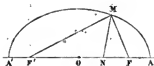
$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Le point P décrit donc l'ellipse.



Troisième procédé. — On verrait de même que si une droite MN de longueur $a - b$, glisse entre les deux axes yy' et xx' ; le point P (situé sur le prolongement de MN), tel que $MP = a$, décrit l'ellipse dont les axes $2a$ et $2b$ sont AA' et BB' .

Équation de la normale à l'ellipse.



Soient x' , y' les coordonnées d'un point M de l'ellipse; on sait que la normale en ce point est la bissectrice MN de l'angle $F'MF$ formé par les rayons vecteurs de ce point.

Cherchons à calculer ON.

Puisque MN est bissectrice de l'angle $F'MF$, on a

$$\frac{F'N}{FN} = \frac{F'M}{FM}$$

Ou bien :

$$\frac{c + ON}{c - ON} = \frac{F'M}{FM}$$

Mais on sait que

$$F'M = a + \frac{cx'}{a} \quad FM = a - \frac{cx'}{a},$$

en sorte que l'on a :

$$\frac{c + ON}{c - ON} = \frac{a + \frac{cx'}{a}}{a - \frac{cx'}{a}}$$

Cette égalité de rapports donne :

$$\frac{ON}{c} = \frac{cx'}{a^2}$$

Et par suite :

$$ON = \frac{c^2 x'}{a^2}$$

Les coordonnées du point N sont donc :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = ON = \frac{c^2 x'}{a^2}$$

Donc, en appliquant ici l'équation de la droite qui passe par deux points, on trouve pour l'équation de la normale MN, laquelle passe par les deux points M (x', y') et N ($y = 0, x = \frac{c^2 x'}{a^2}$).

$$y - y' = \frac{y'}{x' - \frac{c^2 x'}{a^2}} \left(x - \frac{c^2 x'}{a^2} \right), \quad y - y' = \frac{y'}{x' - \frac{c^2 x'}{a^2}} (x - x').$$

Ou bien : puisque $a^2 - c^2 = b^2$

$$(1). \quad y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x').$$

Telle est l'équation de la normale en un point x', y' de l'ellipse.

Equation de la tangente à l'ellipse.

Soient x', y' les coordonnées du point de l'ellipse par lequel on veut mener une tangente à la courbe.

Devant passer par ce point, l'équation de cette tangente est de la forme :

$$y - y' = m (x - x'). \quad (2)$$

De plus, la tangente devant être perpendiculaire à la normale, et cette dernière ayant pour coefficient angulaire le rapport $\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$, ainsi qu'il le montre l'équation (1); on a :

$$m \cdot \frac{a^2 y'}{b^2 x'} + 1 = 0.$$

D'où :

$$m = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

La substitution de cette valeur de m dans (2) donne :

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x').$$

Telle est l'équation de la tangente à l'ellipse, en un point (x', y') de cette courbe.

Forme remarquable sous laquelle on peut mettre l'équation de la tangente à l'ellipse.

L'équation

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x').$$

que nous venons de trouver, donne en chassant le dénominateur et par transposition :

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2y'^2 + b^2x'^2.$$

Mais le point x', y' étant sur l'ellipse, on a :

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2.$$

En sorte que l'on trouve pour l'équation de la tangente à l'ellipse :

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2.$$

Propriétés déduites de l'équation de la tangente à l'ellipse.

I. — L'équation

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2$$

montre que le coefficient angulaire de la tangente est :

$$-\frac{b^2x'}{a^2y'}.$$

Ce coefficient reste le même alors qu'on y remplace x' et y' par $-x'$ et $-y'$; donc :

Les tangentes menées à l'extrémité d'un même diamètre, de l'ellipse sont parallèles.

II. — L'équation

$$a^2y'y + b^2x'x = a^2b^2$$

peut s'écrire ainsi :

$$\frac{\frac{y}{b^2}}{\left(\frac{y'}{b^2}\right)} + \frac{\frac{x}{a^2}}{\left(\frac{x'}{a^2}\right)} = 1.$$

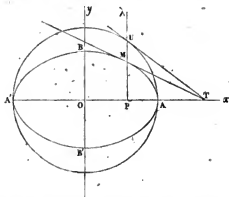
Done, les coordonnées à l'origine de la tangente à l'ellipse sont $\frac{b^2}{y'}$ pour l'ordonnée et $\frac{a^2}{x'}$ pour l'abscisse.

L'ordonnée à l'origine est donc indépendante du grand axe et de l'abscisse x' du point de contact.

L'abscisse à l'origine est donc indépendante du petit axe et de l'ordonnée y' du point de contact.

Arrêtons-nous à cette dernière propriété; elle nous fournit une construction très-simple, pour mener une tangente à l'ellipse en un point donné de cette courbe.

Soit à mener la tangente en un point M d'une ellipse dont les axes sont AA' ou $2a$ et BB' ou $2b$.

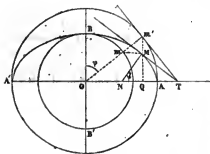


D'après la seconde propriété que nous venons de reconnaître : pour tous les points de la parallèle $P\lambda$ situés sur des ellipses ayant pour grand axe AA' , les tangentes en ces points auront même abscisse à l'origine ; donc le point U de cette parallèle située sur le cercle de diamètre AA' (lequel cercle est une ellipse dont les deux axes sont AA'), jouit de la même propriété.

Or, si l'on mène la tangente UT au cercle de diamètre AA' , son abscisse à l'origine est OT , par suite OT est l'abscisse à l'origine de la tangente inconnue menée à l'ellipse au point M .

Donc, en joignant MT , on obtient la tangente menée à l'ellipse au point M .

Relation importante.



Sur les deux axes AA' et BB' d'une ellipse, décrivons des cercles concentriques.

Par le centre O , menons un rayon quelconque Omm' , lequel coupe en m et m' les deux cercles. On sait que les parallèles menées de ces deux points aux axes, déterminent par leur intersection un point

M de l'ellipse, et l'on a :

$$\frac{MQ}{m'Q} = \frac{b}{a}$$

On sait en outre que si l'on mène les tangentes au point m' du cercle de diamètre $2a$ et au point M de l'ellipse, ces deux tangentes se couperont en un même point T de l'axe AA' . Ceci posé, menons la normale MN et désignons par φ et l les angles $B0m'$ et MNT .

Les triangles rectangles MQT et $m'QT$ donnent :

$$MQ = QT \cdot \operatorname{tg} 0TM = \frac{QT}{\operatorname{tg} l}$$

$$m'Q = QT \operatorname{tg} 0Tm' = QT \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

D'où par division :

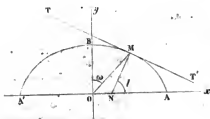
$$\frac{MQ}{m'Q} = \frac{1}{\operatorname{tg} l \operatorname{tg} \varphi}$$

Et enfin, puisque $\frac{MQ}{m'Q} = \frac{b}{a}$,

$$\operatorname{tg} l \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$$

Telle est la relation cherchée.

Relation entre les angles que forment avec le grand axe et avec le petit axe, la normale et le rayon d'un même point de l'ellipse.



Soit $M(x', y')$ un point de l'ellipse, menons la normale MN et le rayon OM de ce point.

Appelons l et φ les angles que font ces lignes MN et OM, la première avec le grand axe et la seconde avec le petit axe.

L'équation de MN a

pour coefficient angulaire :

$$\frac{a^2 y'}{b^2 x'}$$

Donc

$$\operatorname{tg} l = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} \dots \dots \dots (1)$$

L'équation de OM est $y = \frac{y'}{x'} x$.

donc :

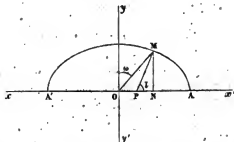
$$\cotg \omega = \frac{y'}{x'} \dots \dots \dots (2)$$

D'où en divisant (1) par (2) il vient :

$$4g \tan \omega = \frac{a^2}{b^2}.$$

Telle est la relation cherchée.

Calcul d'un rayon de l'ellipse.



Soit OM le rayon de l'ellipse correspondant à un point quelconque M dont la normale MP fait avec le grand axe un angle MPA que nous appellerons l .

Appelons ω l'angle MOB du rayon OM avec le petit axe.

Les coordonnées du point M étant x' , y' , on a sur la figure, en appelant R le rayon OM :

$$y' = R \cos \omega, \quad x' = R \sin \omega.$$

Le point x' , y' étant sur l'ellipse, on a :

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2.$$

Et par substitution :

$$(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega) R^2 = a^2 b^2.$$

D'où l'on tire :

$$(1) \dots R^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega} = \frac{a^2}{\sin^2 \omega \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \cot^2 \omega \right)}$$

Or, la relation :

$$\operatorname{tg} l \operatorname{tg} \omega = \frac{a^2}{b^2}$$

donne :

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{a^2}{b^2 \operatorname{tg} l}$$

Et par suite :

$$\operatorname{ctg}^2 \omega = \frac{b^4 \operatorname{tg}^2 l}{a^4} \sin^2 \omega = \frac{a^4}{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 l}$$

En sorte que l'équation (1) devient par substitution et après réduction :

$$R^2 = \frac{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 l}{a^4 + b^4 \operatorname{tg}^2 l} \dots \dots \dots (2)$$

Appelons e le rapport $\frac{c}{a}$; alors, puisque

$$a^2 - b^2 = c^2, \text{ on a } b^2 = a^2 - c^2 = a^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Et par suite

$$b^2 = a^2 (1 - e^2).$$

L'équation (2) devient donc par substitution :

$$R^2 = \frac{a^4 + a^4 (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 l}{a^4 + a^4 (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^2 l}$$

Et successivement :

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 \cos^2 l + a^2 (1 - e^2)^2 \sin^2 l}{\cos^2 l + (1 - e^2)^2 \sin^2 l} = \\ &= \frac{a^2 [1 - \sin^2 l + (1 + e^4 - 2e^2) \sin^2 l]}{1 - \sin^2 l + \sin^2 l - e^2 \sin^2 l} = \\ &= \frac{a^2 [1 - 2e^2 \sin^2 l + e^4 \sin^2 l]}{1 - e^2 \sin^2 l} \end{aligned}$$

En développant le quotient du second membre, on a :

$$R^2 = a^2 (1 - e^2 \sin^2 l - e^4 \sin^4 l - e^6 \sin^6 l - \dots)$$

Et finalement :

$$R = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 l - e^4 \sin^4 l - e^6 \sin^6 l - \dots}$$

Telle est l'expression d'un rayon de l'ellipse.

Remarque. — Si le rapport $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ est suffisamment petit, on pourra, dans le développement de R , négliger les puissances de e , à partir de la quatrième inclusivement.

Dans ce cas :

$$R = a \sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}$$

ÉLÉMENTS

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

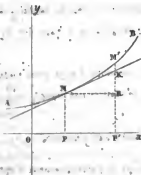
DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE.

Lorsque les valeurs d'une quantité variable deviennent de plus en plus petites et tendent vers la limite zéro, on dit que cette quantité devient un *infinitement petit*.

Une quantité infinitement petite est indéterminée et ce qu'il importe de savoir sur une telle quantité, c'est que sa limite est zéro (*).

L'étude d'une quantité infinitement petite, prise isolément, ne présente aucun intérêt; mais si l'on considère deux quantités infinitement petites dont l'une *dépend* de l'autre, c'est-à-dire dont l'une est *fonction* de l'autre, leur rapport, alors que toutes deux tendent vers la limite zéro, tend vers une limite généralement *finie et déterminée*.

En effet, considérons une fonction de x , $y=f(x)$. L'équation $y=f(x)$ représente généralement une certaine courbe AB.



Considérons un point M de cette courbe, dont les coordonnées sont x et y .

Si l'on donne à la variable x , un accroissement $PP'=h$; l'abscisse x ou OP va devenir OP' , et généralement on trouvera sur la courbe un point M' ayant pour abscisse OP' , en sorte que pour l'accroissement PP' donné à la variable x , l'ordonnée y a pris l'accroissement

(*) Une quantité infinitement petite peut provenir d'une quantité très-grande : telle est l'ordonnée d'une droite oblique sur l'axe des x ; cette ordonnée, qui peut être très-grande devient infinitement petite dans le voisinage du point où la droite rencontre l'axe des x .

correspondant $M'R$. Appelons Δx l'accroissement de x et Δy l'accroissement de y .

Les coordonnées étant supposées rectangulaires, le triangle $M'MR$ nous donne :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} M'MR \dots \dots \dots (1)$$

Si le point M' se rapproche indéfiniment du point M , les quantités Δx et Δy deviennent infiniment petites et l'équation (1) ne cesse d'avoir lieu quelque voisins que soient les deux points M et M' .

Lorsque les deux points se confondent, la sécante MM' devient la tangente MK menée en M à la courbe et l'angle $M'MR$ devient l'angle KMR , donc lorsque Δx et Δy tendent vers la limite zéro, l'équation (1) devient :

$$\limite \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} KMR.$$

La limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est donc une quantité généralement finie et déterminée.

Je dis *généralement finie et déterminée*; car la tangente de l'angle UMX , c'est-à-dire de l'angle que fait avec l'axe des x , la tangente en un point d'une courbe, peut être finie, nulle, infinie ou indéterminée.

Si la tangente à la courbe est oblique sur l'axe des x , la limite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est une quantité finie.

Si la tangente à la courbe est parallèle à l'axe des x , limite $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.

Si la tangente à la courbe est perpendiculaire à l'axe des x , limite $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$.

Si la courbe se réduit à un point, comme on l'a vu pour l'ellipse, la tangente en ce point est indéterminée et dans ce cas limite $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$.

DÉFINITION DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION.

La limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement d'une fonction, à l'accroissement correspondant de la variable, lorsque celui-ci tend vers zéro, est appelée la *dérivée* de cette fonction.

Nous conviendrons de désigner par Δu , l'accroissement donné à une variable ou à une fonction u .

Si donc, l'on appelle y une fonction de x , et si l'on donne à x un

certain accroissement; nous appellerons Δx cet accroissement; la variable x prenant l'accroissement Δx , la fonction y en prendra un correspondant que nous désignerons par Δy ; en sorte que si l'on appelle y' la dérivée de la fonction y , on aura, par définition,

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

LOI DE FORMATION DE LA DÉRIVÉE D'UNE FONCTION ENTIÈRE.

Soit une fonction entière de x ;

$$(1) \dots\dots\dots y = Ax^m + \dots\dots\dots$$

Donnons à x un accroissement Δx , et soit Δy l'accroissement correspondant de la fonction y , nous aurons :

$$(2) \dots\dots\dots y + \Delta y = A(x + \Delta x)^m + \dots\dots\dots$$

Les équations (1) et (2) donnent par soustraction :

$$\Delta y = A(x + \Delta x)^m - Ax^m + \dots\dots\dots$$

Et si l'on développe le second membre au moyen de la formule du binôme, on a :

$$\Delta y = m.Ax^{m-1} \Delta x + \frac{m(m-1)}{1.2} Ax^{m-2} (\Delta x)^2 + \dots\dots\dots$$

par suite

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m.Ax^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} Ax^{m-2} \Delta x + \dots\dots\dots$$

Et en passant à la limite $\Delta x = 0$,

$$y' \text{ ou } \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = m.Ax^{m-1} + \dots\dots\dots$$

Ce résultat montre que :

La dérivée d'une fonction entière s'obtient en multipliant chaque terme de cette fonction par l'exposant de x dans ce terme et en retranchant une unité à cet exposant, après la multiplication.

Ainsi, les dérivées des fonctions entières :

$$4x^3 + 5x^2 - 7x + 3, \quad x^m - a^n$$

sont :

$$12x^2 + 10x - 7, \quad m.x^{m-1}.$$

Il résulte de cette loi de formation, que la dérivée d'une quantité constante est zéro, car dans une constante l'exposant de x est nul.

Remarque. — Soit y une fonction de x , $f(x)$; désignons par $f'(x)$ sa dérivée, nous aurons par définition :

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

En sorte que l'on pourra poser

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon,$$

ϵ étant une quantité dont la limite est zéro, alors que Δx tend lui-même vers cette limite.

DE QUELQUES THÉORÈMES SUR LES FONCTIONS ET SUR LEURS DÉRIVÉES.

Définition. — On dit qu'une fonction $f(x)$ est *croissante* dans le voisinage d'une certaine valeur de la variable, lorsque pour un accroissement positif infiniment petit donné à la variable, à partir de cette valeur, la fonction augmente.

THÉORÈME I. — *Suivant que la dérivée d'une fonction est positive ou négative, la fonction est croissante ou décroissante.*

Soit une fonction $f(x)$ dont la dérivée est $f'(x)$, pour un accroissement h de x on a :

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \epsilon],$$

ϵ s'annulant avec h .

Ici, nous supposons h positif et infiniment petit; alors ϵ est lui-même infiniment petit, donc le signe de $f'(x) + \epsilon$ est celui de $f'(x)$. Et puisque h est positif, il en résulte que le signe de $h[f'(x) + \epsilon]$ est aussi celui de $f'(x)$.

Donc si $f'(x)$ est positif, $f(x+h) - f(x)$ est > 0 , c'est-à-dire que $f(x+h) > f(x)$; au contraire si $f'(x)$ est négatif, $f(x+h) - f(x)$ est < 0 , c'est-à-dire que $f(x+h) < f(x)$.

Donc si $f'(x)$ est positif $f(x)$ va en croissant; et si $f'(x)$ est négatif $f(x)$ va en décroissant.

Définition. — Une fonction est dite *continue*, lorsque pour des accroissements infiniment petits de la variable, elle prend elle-même des accroissements infiniment petits.

THÉORÈME II. — Lorsque pour une valeur finie de la variable, une fonction est finie et a une dérivée finie, la fonction est continue.

Soit une fonction $f(x)$, pour un accroissement h de la variable, la fonction $f(x)$ prend l'accroissement $f(x+h) - f(x)$, et l'on a :

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \epsilon].$$

Si $f'(x)$ est finie et si h est infiniment petit, ϵ est infiniment petit ; par suite $f'(x) + \epsilon$ est une quantité finie et le produit $h[f'(x) + \epsilon]$ est une quantité aussi petite que l'on voudra ; dont l'accroissement $f(x+h) - f(x)$ de la fonction $f(x)$ étant infiniment petit, cette fonction est continue.

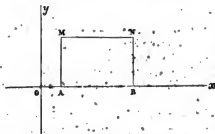
La réciproque de ce théorème est fautive.

En effet, l'égalité

$$f(x+h) - f(x) = h[f'(x) + \epsilon]$$

montre que si à la limite $h = 0$, le premier et le second membre sont nuls, il n'est pas nécessaire que $f'(x)$ soit finie.

THÉORÈME III. — Si pour toutes les valeurs que l'on peut donner à la variable dans l'intervalle de a à b , une fonction conserve toujours la même valeur, la dérivée est constamment nulle pour les valeurs de x comprises entre a et b .



En effet, soit une fonction de x , $f(x)$, appelons y la valeur de cette fonction ; l'équation $y = f(x)$ représente géométriquement une courbe dont les points ont, pour ordonnées les valeurs de la fonction, correspondantes aux abscisses de ces points

et pour une valeur particulière de x , la tangente au point correspondant fait avec l'axe des x , un angle dont la tangente trigonométrique est $f'(x)$.

Ceci posé, soient OA et OB les valeurs de x , entre lesquelles la fonction conserve une valeur constante et soit AM cette valeur constante.

Dans l'intervalle de OA et OB , la courbe dont l'équation est $f(x)$ se réduit à la ligne droite MN parallèle à l'axe des x .

Or, pour tout point de cette droite, la tangente se confond avec MN ,

et puisque MN est parallèle à l'axe des x , il en résulte que pour tout point de cette droite, on a :

$$f'(x) = 0.$$

Réciproque de ce théorème.—Si pour toutes les valeurs de la variable x , comprises entre a et b , la dérivée d'une fonction est constamment nulle, il en résulte que dans l'intervalle de ces valeurs, la fonction reste constante.

Soient OA et OB les valeurs de x entre lesquelles la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ est constamment nulle.

La tangente à une courbe en un point étant le prolongement de l'élément rectiligne infiniment petit, dont se compose la courbe en ce point, il en résulte qu'entre OA et OB, les éléments rectilignes de la courbe $y = f(x)$ sont tous parallèles à l'axe des x . Or, entre OA et OB, la dérivée $f'(x)$ est nulle, c'est-à-dire finie, il en résulte que la courbe $y = f(x)$ est continue entre OA et OB. Donc, entre OA et OB les éléments rectilignes de la courbe sont situés sur une même parallèle à l'axe des x .

C'est-à-dire que si MA est l'ordonnée de la courbe pour $x = OA$, la courbe entre OA et OB se réduit à la parallèle MN; son ordonnée $f(x)$ est donc constamment égale à MA dans l'intervalle des valeurs de x comprises entre OA et OB.

THÉORÈME IV. — Si pour des valeurs de la variable x , comprises dans l'intervalle de a à b , deux fonctions ne diffèrent que par une constante, leurs dérivées sont constamment égales pour les valeurs de la variable comprises entre les limites a et b .

Soient OA et OB les valeurs de x entre lesquelles deux fonctions de x , $f(x)$ et $F(x)$ ne diffèrent que par une constante.

Appelons y et Y les valeurs de ces fonctions.

Les équations $y = f(x)$, $Y = F(x)$ représentent deux courbes MN, M'N', et pour des valeurs de x comprises entre OA et OB, la différence $Y - y$ est constante.

Ceci posé, soit OC une valeur de x comprise entre OA et OB; à l'abscisse OC correspondent les points M et M' situés sur les courbes MN et M'N'.

Pour un accroissement très-petit CD donné à l'abscisse, on obtient les deux nouveaux points N et N' de ces courbes; et par hypothèse, on a :

$$MN' \text{ ou } ND - ND = MM' \text{ ou } M'C - MC,$$

CD étant infiniment petit, les éléments MN et M'N' des courbes peuvent être considérés comme rectilignes; en sorte que ces éléments prolongés sont les tangentes menées aux courbes en M et M'. Donc, si l'on mène

les parallèles $M'I'$ et MI à l'axe des x , on a :

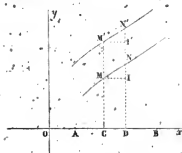
$$f'(x) = \operatorname{tg} NMI, \quad F'(x) = \operatorname{tg} N'M'I'.$$

Or, les lignes MM' et NN' étant égales et parallèles, la figure $MM'NN'$ est un parallélogramme, donc $M'N'$ est parallèle à MN .

Les angles $N'M'I'$ et NMI ont donc leurs côtés parallèles et dirigés dans le même sens; ils sont donc égaux; et par suite :

$$f'(x) = F'(x).$$

Réciproque de ce théorème — Si pour des valeurs de x comprises entre a et b , les dérivées de deux fonctions sont constamment égales, les fonctions ne diffèrent que par une constante pour les valeurs de x compris entre les mêmes limites.



Soient $f'(x)$ et $F'(x)$ les dérivées de deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$. On suppose que pour des valeurs de x comprises entre OA et OB , on ait constamment $f'(x) = F'(x)$.

Je dis que la différence $F(x) - f(x)$ ou la différence $Y - y$ des ordonnées des deux courbes

$Y = F(x)$ et $y = f(x)$ est constante entre OA et OB .

En effet, pour une valeur de x , OC comprise entre OA et OB et pour un accroissement CD infiniment petit de x , on a les points M , N sur la première courbe et M' , N' sur la seconde; en sorte qu'en menant les parallèles MI , $M'I'$ à l'axe des x , on a :

$$f'(x) = \operatorname{tg} NMI, \quad F'(x) = \operatorname{tg} N'M'I'.$$

Mais : $f'(x) = F'(x)$,

Donc : $N'M'I' = NMI$.

Par conséquent, puisque les côtés MI et $M'I'$ de ces angles sont parallèles, il en résulte que les autres côtés MN et $M'N'$ sont aussi parallèles.

La figure $MNM'N'$ est donc un parallélogramme, d'où il suit :

$$MM' = NN',$$

c'est-à-dire que

$$Y - y \text{ ou } F(x) - f(x) = \text{constante.}$$

Différentielle d'une fonction. — L'équation

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$$

obtenue ci-dessus, donne :

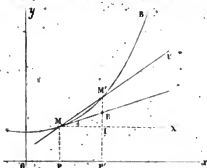
$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$$

Cette équation montre que Δy , ou l'accroissement d'une fonction se compose de deux parties; l'une $f'(x) \cdot \Delta x$ qui est le produit de la dérivée de la fonction par l'accroissement de la variable et l'autre $\varepsilon \cdot \Delta x$.

Le produit de la dérivée d'une fonction par l'accroissement de la variable s'appelle la *différentielle* de la fonction.

L'accroissement de la variable étant indéterminé et ayant pour limite zéro, il en résulte que la différentielle est elle-même indéterminée et a pour limite zéro.

Sur la figure, on voit que MB étant la courbe dont l'équation est $y = f(x)$ et PP' étant l'accroisse-



ment de l'abscisse OB ou x ; RI est la différentielle, car on a :

$$RI = MI \operatorname{tg} IMR = \Delta x \cdot f'(x).$$

En sorte que M'R est $\varepsilon \Delta x$.

Différentielle de la variable. — Si l'on considère la fonction entière $y = x^m$, sa dérivée est mx^{m-1} ; sa différentielle est donc :

$$mx^{m-1} \cdot \Delta x.$$

Et dans le cas où $m = 1$; cette différentielle qui est la différentielle de x (puisque $y = x$) devient Δx ; donc :

La différentielle de la variable est l'accroissement même de cette variable.

Notation différentielle. — La différentielle d'une fonction se désigne en mettant d devant cette fonction; ainsi, une fonction étant représentée par $f(x)$ ou y , sa différentielle sera désignée par la notation :

$$d.f(x) \quad \text{ou} \quad dy.$$

En sorte que la définition de la différentielle donnée ci-dessus, s'e

criera ainsi :

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Ou bien, puisque $\Delta x = dx$,

$$dy = f'(x) dx.$$

Cette équation donne :

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

On emploie souvent la notation :

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

Il ne faut pas y avoir une identité.

On doit, dans ce cas, regarder $\frac{dy}{dx}$ comme une expression qu'on ne peut jamais séparer et qui représente la dérivée.

On verra bientôt que cette notation, alors que x ne sera plus une variable indépendante, deviendra l'expression d'un théorème important.

Considération sur la différentielle. — Si l'on considère une quantité et si l'on imagine la suite de ses valeurs dans la continuité la plus intime de cette quantité en partant de l'état zéro : le premier état de cette quantité, c'est-à-dire la première valeur qu'elle prend est la différentielle de cette quantité.

La différentielle est donc en quelque sorte le passage de ce qui n'est pas à ce qui est. Une telle valeur échappe à nos sens; elle est indéterminée et si l'on veut l'apprécier on doit la considérer comme nulle.

La notation d qui la représente est une chose purement fictive, laquelle permet de conserver dans le calcul et de soumettre aux règles du calcul, des quantités dont l'appréciation est impossible, mais dont les rapports donnent des résultats appréciables et de la plus haute importance.

Expression générale de l'équation de la tangente à une courbe algébrique,

L'équation d'une courbe étant $y = f(x)$, $f'(x)$ représente le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe; en sorte que l'équation de la tangente en un point x' , y' de cette courbe est :

$$y - y' = f'(x') \cdot (x - x').$$

Ou d'après la notation différentielle :

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} \cdot (x - x').$$

PRINCIPES DES FONCTIONS DE FONCTIONS.

Jusqu'ici, en considérant une fonction

$$y = f(x),$$

nous y avons supposé que x fût la variable indépendante.

Considérons actuellement la fonction :

$$y = f(u),$$

u étant une fonction de x , et soit :

$$y = f(u), \dots u = F(x).$$

On a par substitution :

$$y = f[F(x)] = \text{une fonction de } x; \text{ soit } \varphi(x).$$

On dit alors que : y est une fonction de fonction.

Si dans la fonction $u = F(x)$, on donne à x un accroissement Δx , la fonction u prend un accroissement correspondant Δu ; et puisque dans $y = f(u)$, u est la variable, la fonction y prendra elle-même un certain accroissement Δy .

Les accroissements Δu et Δy convergent vers la limite zéro, lorsque l'accroissement arbitraire Δx de la variable indépendante x , converge vers cette même limite.

Ceci posé, on a identiquement :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Et si l'on passe à la limite de Δx , il vient :

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \left(\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} \right), \dots$$

Or $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ dérivée de y ou $\varphi(x)$ prise par rapport à $x = \varphi'(x)$.

$\lim \frac{\Delta y}{\Delta u} =$ dérivée de y ou $f(u)$ prise par rapport à $u = f'(u)$.

$\lim \frac{\Delta u}{\Delta x} =$ dérivée de u ou $F(x)$ prise par rapport à $x = F'(x)$.

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$\varphi'(x) = f'(u) \cdot F'(x).$$

C'est là le principe des fonctions de fonctions.

Il exprime que : la dérivée prise par rapport à x d'une fonction de fonction est égale au produit des dérivées de chacune des fonctions prises respectivement par rapport aux variables qui entrent dans ces fonctions.

La différentielle d'une fonction $f(u)$, u n'étant pas la variable indépendante, est égale au produit de la dérivée de la fonction $f(u)$ prise par rapport à u , multipliée par la différentielle de u , comme si u était la variable indépendante.

En effet, soit une fonction de fonction

$$y = f(u), \quad u = F(x).$$

y étant représentée par $\varphi(x)$, on a :

$$\varphi'(x) = f'(u) \cdot F'(x).$$

Et par suite en multipliant par dx :

$$\varphi'(x) \cdot dx = f'(u) F'(x) \cdot dx, \dots \dots (1)$$

Or par définition, puisque x est la variable indépendante dans les fonctions $y = \varphi(x)$ et $u = F(x)$,

On a :

$$dy = \varphi'(x) \cdot dx \quad \text{et} \quad du = F'(x) \cdot dx.$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$dy = f'(u) \cdot du.$$

On voit donc encore, par cette équation, que : u n'étant pas la variable indépendante, la différentielle de la fonction $f(u)$ s'obtient aussi en multipliant la dérivée de $f(u)$ prise par rapport à u , par la différentielle de u .

Extension du principe des fonctions de fonctions à un nombre quelconque de fonctions dépendantes les unes des autres.

Soit :

$$y = f(u), \quad u = F(v), \quad v = \psi(x).$$

y est une fonction de x que j'appellerai $z(x)$, et je dis que l'on aura encore :

$$\varphi'(x) = f'(u) \cdot F'(v) \cdot \psi'(x).$$

En effet, appliquons le principe que nous venons de démontrer, sur

la différentielle d'une fonction dont la variable n'est pas indépendante aux fonctions

$$y = f(u), \quad u = F(v), \quad v = \varphi(x).$$

Nous aurons :

$$dy = f'(u) \cdot du \dots \dots (a)$$

$$du = F'(v) \cdot dv \dots \dots (b)$$

$$dv = \varphi'(x) \cdot dx \dots \dots (c)$$

En multipliant membre à membre ces équations, il vient :

$$dy = f'(u) \cdot F'(v) \cdot \varphi'(x) \cdot dx.$$

Et par suite :

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot F'(v) \cdot \varphi'(x).$$

Mais

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x).$$

Donc enfin :

$$\varphi'(x) = f'(u) \cdot F'(v) \cdot \varphi'(x).$$

Extension de la notation différentielle.

Si comme dans ce cas, on a plusieurs dérivées à considérer provenant des fonctions :

$$y = f(u), \quad u = F(v), \quad v = \varphi(x).$$

Au lieu de les représenter par $f'(u)$, $F'(v)$, $\varphi'(x)$ comme nous l'avons fait, nous les désignerons par les simples notations $\frac{dy}{du}$, $\frac{dy}{dv}$, $\frac{du}{dv}$, $\frac{dv}{dx}$, en sorte que les équations (a), (b) et (c) s'écriront ainsi :

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot du \dots \dots (a)$$

$$du = \frac{du}{dv} \cdot dv \dots \dots (b)$$

$$dv = \frac{dv}{dx} \cdot dx \dots \dots (c)$$

En multipliant membre à membre ces dernières équations, il vient :

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx.$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

C'est là l'expression du théorème général des fonctions de fonctions, il faut bien se garder d'y supprimer les facteurs communs; non plus que dans les équations (d), (e), (f), lesquelles représentent ainsi un théorème et ne représenteraient rien du tout après la suppression des facteurs.

Extension des théorèmes III et IV aux différentielles des fonctions.

La différentielle d'une fonction étant le produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire de la variable, il en résulte que :

1° Si une fonction dérivée s'annule pour des valeurs de x , comprises entre deux valeurs a et b , la différentielle s'annule dans le même intervalle et réciproquement.

2° Si deux fonctions dérivées sont égales dans un certain intervalle, les différentielles sont égales dans le même intervalle et réciproquement.

On peut donc dans les théorèmes III et IV remplacer les dérivées par les différentielles.

RÈGLES DE LA DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

Une fonction est dite *explicite*, lorsqu'elle est résolue par rapport à la variable, telle est $y = f(x)$.

Une fonction est dite *implicite*, lorsqu'elle n'est pas résolue par rapport à la variable, telle est la fonction y de x , donnée par l'équation

$$f(x, y) = 0.$$

Avant de passer outre, remarquons que, chercher la différentielle ou la dérivée d'une fonction est le même problème; car la différentielle d'une fonction d' x étant trouvée, il suffit de la diviser par dx pour avoir la dérivée.

THÉORÈME I. — *La différentielle d'une somme de fonctions est égale à la somme des différentielles de chacune des parties de la somme.*

(Le mot *somme* doit s'entendre algébriquement.)

Soit

$$(1) \dots y = u + v + w + \dots$$

une somme dans laquelle $u, v, w, \dots$ sont des fonctions de x ; y est alors une fonction de x .

Si l'on donne à x l'accroissement Δx , les fonctions $u, v, w, \dots, y$, deviennent :

$$u + \Delta u, \quad v + \Delta v, \quad w + \Delta w, \dots, \quad y + \Delta y,$$

et l'on a :

$$(2) \dots \dots y + \Delta y = u + \Delta u + v + \Delta v + w + \Delta w + \dots$$

D'où :

$$(2) - (1) \dots \dots \Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots$$

Et en divisant de part et d'autre par Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} + \dots$$

Et à la limite, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \dots$$

D'où enfin, en multipliant par dx afin d'introduire les différentielles :

$$dy = du + dv + dw \dots$$

THÉOREME II. — *La différentielle du produit d'une constante par une fonction est égale au produit de cette constante par la différentielle de la fonction.*

Soit ; $y = a.u \dots \dots (1)$

u étant une fonction de x et a une constante.

En donnant à x l'accroissement Δx , les fonctions u et y prennent les accroissements $\Delta u, \Delta y$, et l'on a :

$$y + \Delta y = a(u + \Delta u) \dots \dots (2)$$

D'où :

$$(2) - (1) \dots \dots \Delta y = a.\Delta u.$$

Par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a. \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Et la limite

$$\frac{dy}{dx} = a. \frac{du}{dx}$$

D'où :

$$dy = a. du \dots \dots (3)$$

Remarque. — Si $a = -1$, y devient $-u$ et l'équation (3) donne $dy = -du$.

Donc, si une fonction change de signe, la différentielle change de signe.

THÉORÈME III. — La différentielle d'un produit de plusieurs fonctions d' x , est égale à la somme des produits des différentielles de chacune des fonctions, multipliées par le produit des autres fonctions.

Considérons d'abord un produit de deux fonctions

$$y = u \cdot v \dots \dots (1)$$

En donnant à x l'accroissement Δx , les fonctions u , v et y prennent les accroissements correspondants : Δu , Δv et Δy , et l'on a :

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) (v + \Delta v),$$

ou bien :

$$y + \Delta y = uv + v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v \dots \dots (2)$$

D'où :

$$(2) - (1) \dots \Delta y = v \cdot \Delta u + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v.$$

Par suite :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Et'en passant à la limite, il vient :

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx} \dots \dots (3)$$

Car dans le produit $\frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot \Delta u$, le facteur Δu devient nul et le facteur

$\frac{\Delta v}{\Delta x}$ devient la dérivée de v .

L'équation (3) donne enfin :

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv.$$

Remarque sur la forme particulière du quotient de la différentielle d'un produit divisé par ce produit.

En divisant par uv ou y , les deux membres de l'équation

$$dy = v \cdot du + u \cdot dv,$$

on a :

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v}.$$

C'est-à-dire que le quotient de la différentielle d'un produit de fonctions

de x , divisés par ce produit est égal à la somme des quotients des différentielles de chacun des facteurs divisés par ces facteurs.

Ce principe s'étend à un produit d'un nombre quelconque de facteurs.

En effet, supposons ce principe vrai pour un produit

$$y = u. v. w. \dots t$$

de n facteurs; je dis qu'il est vrai pour le produit :

$$Y = u. v. w. \dots t. \lambda,$$

contenant un facteur de plus.

Le principe étant vrai pour le produit

$$y = u. v. w. \dots t,$$

on a :

$$(a) \quad \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots + \frac{dt}{t}.$$

Or :

$$Y = y. \lambda.$$

Et puisque ce produit n'a que deux facteurs, nous aurons, d'après la remarque du théorème II,

$$\frac{dY}{Y} = \frac{dy}{y} + \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Et à cause de (a),

$$(b) \dots \frac{dY}{Y} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots + \frac{dt}{t} + \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Le principe est donc général, car étant vrai pour deux facteurs, il est vrai pour trois; vrai pour trois, il l'est pour quatre, et ainsi de suite.

L'équation (b) donne, en chassant le dénominateur Y ,

$$dY = du. \frac{Y}{u} + dv. \frac{Y}{v} + dw. \frac{Y}{w} + \dots$$

Et ainsi se trouve démontré pour un nombre quelconque de facteurs le théorème II énoncé ci-dessus.

THEOREME IV. — La différentielle d'une puissance (de degré entier et positif) d'une fonction de x , est égale : au produit de l'exposant de cette puissance par la fonction élevée à une puissance d'un degré moindre d'une unité multiplié par la différentielle de cette fonction.

En effet, considérons le produit de m fonctions de x .

$$y = u \cdot v \cdot w \dots t.$$

On a, d'après la remarque établie ci-dessus,

$$dy = du \cdot \frac{y}{u} + dv \cdot \frac{y}{v} + dw \cdot \frac{y}{w} + \dots + dt \cdot \frac{y}{t}.$$

Et si l'on suppose $t = w = u = v$, on a :

$$y = u^m \quad \frac{y}{u} = \frac{y}{v} = \frac{y}{w} = \dots = u^{m-1}.$$

Et par suite :

$$dy = m \cdot u^{m-1} \cdot du.$$

Extension du principe $du^m = m u^{m-1} du$ pour un exposant quelconque.

Supposons m fractionnaire ; et soit :

$$y = u^{\frac{p}{q}}.$$

En élevant à la puissance q de part et d'autre, il vient :

$$y^q = u^p.$$

D'où en différentiant :

$$q \cdot y^{q-1} dy = p \cdot u^{p-1} du.$$

Cette équation donne successivement :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} du \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{\frac{u^{\frac{p}{q}}}{u^{q-1}}} du \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{u^{\frac{p}{q} - (q-1)}} du \\ &= \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{u^{\frac{p}{q} - q + 1}} du \end{aligned}$$

Si m est négatif, soit

$$y = u^{-m}.$$

Cette équation donne :

$$y \cdot u^m = 1.$$

Et si l'on applique à cette équation le principe de la différentiation d'un produit et d'une puissance, on a successivement :

$$u^m \cdot dy + y \cdot m u^{m-1} \cdot du = 0.$$

$$dy = -m \cdot \frac{y \cdot u^{m-1}}{u^m} du.$$

$$dy = -m \cdot u^{-m-1} du.$$

THÉORÈME V. — Différentielle d'un radical.

Soit u une fonction de x ; et soit

$$y = \sqrt[m]{u}.$$

En élevant à la puissance m de part et d'autre, il vient :

$$y^m = u.$$

Et en prenant les différentielles de part et d'autre

$$m \cdot y^{m-1} \cdot dy = du.$$

Ou bien :

$$m \cdot \sqrt[m]{u^{m-1}} \cdot dy = du.$$

D'où :

$$dy = \frac{du}{m \cdot \sqrt[m]{u^{m-1}}} \dots\dots (1).$$

Telle est la différentielle de $\sqrt[m]{u}$.

Dans le cas où $m = 2$, $\sqrt[m]{u} = \sqrt{u}$ et la formule (1) devient :

$$d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}.$$

C'est-à-dire que : la différentielle de la racine carrée d'une fonction de x est égale au quotient de la différentielle de la fonction divisée par le double de la racine de cette fonction.

On peut remarquer que $\sqrt{u} = u^{\frac{1}{2}}$ et l'on rentre dans le cas précédent.

Remarque. — L'expression :

$$d(u.v.w....) = w.v.... du + u.w.... dv + u.v.... dw + ...$$

montre que la différentielle d'un produit revient à faire la somme des différentielles obtenues en considérant successivement dans ce produit chacune des fonctions comme seule variable.

THÉORÈME. — La différentielle du quotient de deux fonctions de x , est égale : au quotient de la différentielle du numérateur multipliée par le dénominateur, diminué du produit de la différentielle du dénominateur multipliée par le numérateur, cette différence étant divisée par le carré du dénominateur.

En effet, soit la fonction :

$$y = \frac{u}{v} \quad (1)$$

u et v étant des fonctions de x .

L'équation (1) peut s'écrire, ainsi :

$$y = u.v^{-1}$$

Et en différentiant de part et d'autre, il vient successivement :

$$dy = v^{-1} du + (-1).u.v^{-2} dv.$$

$$= \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2}$$

$$= \frac{v \cdot du - u dv}{v^2}$$

Remarque. — Si u est constant, alors $du = 0$; et l'on a :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = -\frac{u \cdot dv}{v^2} \quad (2)$$

De même, si v est constant, $dv = 0$; et l'on a :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du}{v} \quad (3)$$

Si l'on ajoute les différentielles (2) et (3) obtenues en considérant

dans $\frac{u}{v}$, u et v successivement et séparément comme constantes, on a :

$$\frac{du}{v} - \frac{u \cdot dv}{v^2} = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2} = d\left(\frac{u}{v}\right).$$

C'est-à-dire, que la remarque faite ci-dessus sur la différentielle d'un produit s'applique aussi à la différentielle d'un quotient.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

Différentielle de Log. x.

Soit la fonction :

$$y = \text{Log. } x. \quad (1)$$

Je donne à x l'accroissement Δx et j'ai

$$y + \Delta y = \text{Log. } (x + \Delta x). \quad (2)$$

D'où :

$$(2) - (1) \dots \Delta y = \text{Log. } (x + \Delta x) - \text{Log. } x.$$

Ou bien :

$$\Delta y = \text{Log. } \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Et par suite :

$$(3) \dots \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \text{Log. } \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Posons $\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ (alors quand Δx convergera vers zéro, α convergera vers la même limite).

L'équation (3) devient donc :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\alpha \cdot x} \text{Log. } (1 + \alpha).$$

Ou bien :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \text{Log. } \left\{ \left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}.$$

Si l'on passe à la limite de Δx , l'expression $\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ devient e , et l'on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \text{Log. } e.$$

Par suite :

$$dy \text{ ou } d \text{ Log. } x = \frac{dx}{x} \text{ Log. } e.$$

Telle est la différentielle d'une fonction logarithmique.

Remarque I. — Afin de distinguer les logarithmes de Briggs ou vulgaires (dans lesquels la base est 10) des logarithmes de Néper (dans lesquels la base est e), nous désignerons les premiers par la notation *Log* et les seconds par la notation *log*.

Dans les logarithmes de Néper $\log e = 1$, en sorte que l'on a :

$$d \log. x = \frac{dx}{x}.$$

Remarque H. — Si l'on considère une fonction u de x , on aura d'après le principe des fonctions de fonctions :

$$d \text{ Log. } u = \frac{du}{u} \text{ Log. } e. \quad d \log. u = \frac{du}{u}.$$

En prenant les logarithmes d'un produit et d'un quotient, d'une puissance et d'une racine et en différentiant les expressions obtenues, on arrivera aisément aux différentielles connues du produit et du quotient, d'une puissance et d'une racine.

Différentielle de a^x (a étant une constante).

Soit la fonction

$$y = a^x.$$

En prenant les logarithmes népériens de part et d'autre, il vient

$$\log. y = x \log. a.$$

Et en différentiant, on a :

$$\frac{dy}{y} = dx \log. a.$$

D'où :

$$dy = a^x \log. a \, dx.$$

Si $a = e$, $\log. a = 1$, en sorte que l'on a :

$$dy = e^x \, dx, \quad \frac{d e^x}{d x} = e^x.$$

C'est-à-dire que la dérivée de la fonction e^x est cette fonction même.
Le principe des fonctions de fonctions donne :

$$d(e^u) = e^u du.$$

Différentielle de u^v (u et v étant des fonctions de x).

Soit la fonction

$$y = u^v.$$

On en tire :

$$\log. y = v. \log. u.$$

Et en différentiant de part et d'autre, d'après le théorème sur la différentielle d'un produit, il vient successivement :

$$\frac{dy}{y} = v. d. \log. u + \log. u. dv.$$

$$\frac{dy}{y} = v. \frac{du}{u} + \log. u. dv.$$

$$dy = v. u^{v-1} du + u^v \log. u. dv.$$

Telle est la différentielle cherchée.

Remarque. — Si dans la fonction u^v nous considérons successivement et respectivement u et v comme constantes.

Nous aurons :

$$v \text{ supposée constante} \dots\dots d(u^v) = v. u^{v-1} du.$$

$$u \text{ supposée constante} \dots\dots d(u^v) = u^v \text{ Log. } u. dv.$$

La somme de ces deux différentielles donne précisément la différentielle de la fonction u^v (u et v étant toutes deux variables).

Différentielle de $\sin x$.

Soit la fonction $y = \sin x$ (1)

En suivant la marche ordinaire pour calculer la dérivée d'une fonction, on a successivement :

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x). \dots\dots (2)$$

$$(2) - (1) \dots \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x},$$

ou ce qui est la même chose :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Et par suite :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x. \text{ D'où } dy = \cos x. dx.$$

Telle est la différentielle du sinus.

Donc : $d. \sin u = \cos u. du.$

Différentielle de cos x.

Soit la fonction $y = \cos x.$

On a $y = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ et si l'on applique à cette formule la différentielle de $\sin u$, que l'on vient de trouver, on a :

$$dy = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = - \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx.$$

Et enfin :

$$dy = - \sin x. dx.$$

Telle est la différentielle de $\cos x.$

Donc :

$$d \cos u = - \sin u. du.$$

Différentielle de tg x.

Soit la fonction $y = \operatorname{tg} x.$ On a :

$$y = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Et d'après le principe de la différentielle d'un quotient :

$$dy = \frac{\cos^2 x dx + \sin^2 x dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Donc :

$$d. \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Et par suite

$$d. \operatorname{tg} u = \frac{du}{\cos^2 u}.$$

On trouvera de même :

$$d. \cot u = -\frac{du}{\sin^2 u}.$$

$$d. \sec u = d \frac{1}{\cos u} = \lg u \sec u du = \sqrt{\sec^2 u - 1} \sec u du.$$

$$d. \operatorname{cosec} u = d \frac{1}{\sin u} = -\cot u \operatorname{cosec} u. du = -\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1} \operatorname{cosec} u du.$$

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

Pour exprimer que y est l'arc dont le sinus est x , on écrit :

$$y = \arcsin x.$$

Différentielle de $y = \arcsin x$.

L'équation :

$$y = \arcsin x$$

donne :

$$x = \sin y.$$

Et en différentiant :

$$dx = \cos y dy.$$

D'où :

$$dy = \frac{dx}{\cos y} = \frac{dx}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc :

$$d. \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Et par suite :

$$d. \arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Différentielle de $y = \arccos x$.

L'équation

$$y = \arccos x$$

donne :

$$x = \cos y.$$

Et par suite :

$$dx = -\sin y dy.$$

D'où

$$dy = -\frac{dx}{\sin y} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc :

$$d \operatorname{arc} \cos x = - \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Et :

$$d \operatorname{arc} \cos u = - \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Remarque.—Les différentielles de $\operatorname{arc} \sin x$ et de $\operatorname{arc} \cos x$ ne diffèrent que par le signe $\pm$ ce que l'on voit à priori de la manière suivante :

En effet on a :

$$\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

D'où en différentiant :

$$d \operatorname{arc} \sin x + d \operatorname{arc} \cos x = 0.$$

Et par suite :

$$d \operatorname{arc} \sin x = - d \operatorname{arc} \cos x.$$

Différentielle de $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

L'équation

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \text{ donne :}$$

$$x = \operatorname{tg} y.$$

Et par suite :

$$dx = \frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{dy}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = (1 + \operatorname{tg}^2 y) dy.$$

D'où :

$$dy = \frac{dx}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Donc :

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2} \dots \dots d \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{du}{1+u^2}.$$

On trouvera de même :

$$d \operatorname{arc} \cot x = - \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$d \operatorname{arc} \sec x = \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

$$d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x = - \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

On peut appliquer aux différentielles de $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ et $\operatorname{arc} \cot$; de $\operatorname{arc} \sec$ et de $\operatorname{arc} \operatorname{cosec}$ la remarque faite sur les différentielles de $\operatorname{arc} \sin$ et de $\operatorname{arc} \cos$.

TABLEAU DES DIFFÉRENTIELLES ET DES DÉRIVÉES DES FONCTIONS EXPLICITES
D'UNE SEULE VARIABLE.

$y = y + v + w \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dx} + \dots$	$dy = du + dv + dw + \dots$
$y = au \dots$	$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{du}{dx}$	$dy = a \cdot du$
$y = u \cdot v \cdot w \dots$	$\frac{dy}{dx} = v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + uv \cdot \frac{dw}{dx} \dots$	$dy = v \cdot w \cdot du + \dots$
$y = \frac{u}{v} \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$	$dy = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}$
$y = u^m \dots$	$\frac{dy}{dx} = m \cdot u^{m-1} \frac{du}{dx}$	$dy = m u^{m-1} du$
$y = \sqrt{u} \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{2 \sqrt{u}}$	$dy = \frac{du}{2 \sqrt{u}}$
$y = \log u \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u}$	$dy = \frac{du}{u}$
$y = \text{Log } u \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Log } e \frac{du}{dx}}{u}$	$dy = \frac{\text{Log } e \frac{du}{dx}}{u}$
$y = a^u \dots$	$\frac{dy}{dx} = a^u \log a \cdot \frac{du}{dx}$	$dy = a^u \log a \cdot du$
$y = e^u \dots$	$\frac{dy}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$	$dy = e^u du$
$y = u^v \dots$	$\frac{dy}{dx} = v \cdot u^{v-1} \frac{du}{dx} + u^v \log u \frac{dv}{dx} \dots$	$dy = v \cdot u^{v-1} du + u^v \log u \cdot dv$
$y = \sin u \dots$	$\frac{dy}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$	$dy = \cos u du$
$y = \cos u \dots$	$\frac{dy}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$	$dy = -\sin u du$
$y = \text{tg } u \dots$	$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\cos^2 u}$	$dy = \frac{du}{\cos^2 u}$
$y = \text{cot } u \dots$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sin^2 u}$	$dy = -\frac{du}{\sin^2 u}$

$$y = \sec u, \dots \frac{dy}{dx} = \sqrt{\sec^2 u - 1} \sec u \frac{du}{dx} \dots \dots dy = \sqrt{\sec^2 u - 1} \sec u \cdot du.$$

$$y = \operatorname{cosec} u \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1} \operatorname{cosec} u \frac{du}{dx}, \dots, dy = -\sqrt{\operatorname{cosec}^2 u - 1} \operatorname{cosec} u \cdot du.$$

$$y = \arcsin u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad dy = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arccos u, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}} \quad \therefore \quad dy = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$y = \arctan u \dots \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2} \dots dy = \frac{du}{1+u^2}$$

$$y = \text{arc cot } u, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2} \dots \dots \dots dy = -\frac{du}{1+u^2}.$$

$$y = \text{arc sec } u, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u \sqrt{u^2 - 1}} \dots \dots \dots dy = \frac{du}{u \sqrt{u^2 - 1}}.$$

$$y = \operatorname{arccosec} u \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}}{u\sqrt{u^2-1}} \dots\dots\dots dy = \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}}$$

Exemples de différentiation.

1. — Soit, $y = (a + b\dot{x}^m)^n, \dots$

La différentiation de la fonction proposée donne successivement :

$$\begin{aligned} dy &= n(a+bx^m)^{n-1} d(a+bx^m) = n(a+bx^m)^{n-1} d(bx^m) = \\ &= n.b.(a+bx^m)^{n-1} dx^m = m.n.b.(a+bx^m)^{n-1} x^{m-1} dx. \\ \frac{dy}{dx} &= mn.b.(a+bx^m)^{n-1} x^{m-1}. \end{aligned}$$

II. — $\eta = e^x$. Les principes $d e^u = e^u du$, $e du^m = m u^{m-1} du$

donnent

$$dy = e^x \cdot dx^n = n \cdot e^x \cdot x^{n-1} dx.$$

$$\frac{dy}{dx} = n.e^{x^n}, x^{n-1},$$

III. $y = \text{Log}(\text{Log } x)$. Le principe $d \text{Log } u = \frac{du}{u} \text{Log } e$

donne :

$$dy = \frac{d \text{Log } x}{\text{Log } x} \cdot \text{Log } e = \frac{\frac{dx}{x} \text{Log } e}{\text{Log } x} \cdot \text{Log } e = \frac{dx}{x \cdot \text{Log } x} (\text{Log } e)^2.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{Log } e)^2}{x \text{Log } x}.$$

IV. — $y = \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$

Les principes

$$d \sqrt{u} = \frac{du}{2 \sqrt{u}} \quad d(u+v+\dots) = du + dv + \dots$$

$$du^m = mu^{m-1} du.$$

donnent successivement :

$$dy = \frac{d(x + \sqrt{1+x^2})}{2 \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{dx + d \sqrt{1+x^2}}{2 \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{dx + \frac{d(1+x^2)}{2 \sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{dx + \frac{dx^2}{\sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{dx + \frac{2x dx}{2 \sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} dx + x dx}{2 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} = \frac{(x + \sqrt{1+x^2}) dx}{2 \sqrt{1+x^2} \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{1+x^2}} dx, \dots, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{1+x^2}}.$$

V. $y = \log \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$

$$dy = \frac{d \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}; \text{ mais on vient de trouver (IV) }$$

$$d \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}}{2 \sqrt{1+x^2}} dx.$$

En sorte que l'on a :

$$dy = \frac{dx}{2 \sqrt{1+x^2}}.$$

VI. $y = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$

Les principes

$$d \arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}, \quad d \frac{u}{v} = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

$$d \sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}, \quad du^n = nu^{n-1} du.$$

donnent :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{1+x^2}}} = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{1+x^2} \cdot dx - x \cdot d\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot dx - \frac{x \cdot d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot dx - \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{(1+x^2) dx - x^2 dx}{1+x^2} = \frac{dx}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Remarque. $\frac{dx}{1+x^2} = \arctg x$. Donc :

$$\arctg x = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right).$$

Ce que l'on vérifie aisément.

VII. $y = \frac{x^m}{(1+x)^n}.$

Les principes $d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, $du^n = nu^{n-1} du$ donnent :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{(1+x)^n dx^m - x^m d(1+x)^n}{(1+x)^{2n}} = \\ &= \frac{m(1+x)^n x^{m-1} dx - nx^m (1+x)^{n-1} d(1+x)}{(1+x)^{2n}} = \\ &= \frac{x^{m-1} (1+x)^{n-1} [m(1+x) - n \cdot x] dx}{(1+x)^{2n}} = \\ &= \frac{x^{m-1} [(m-n)x + m] dx}{(1+x)^{n+1}}. \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x^{m-1} [(m-n)x + m]}{(1+x)^{n+1}}. \end{aligned}$$

VIII. $y = \text{arc tg} \left(\frac{2x}{1-x^2} \right).$

Les principes

$$d \text{ arc tang } u = \frac{du}{1+u^2}, \quad d \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vdu - u dv}{v^2},$$

$$du^n = nu^{n-1} du.$$

donnent :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d \frac{2x}{1-x^2}}{1 + \left(\frac{2x}{1-x^2} \right)^2} = \frac{(1-x^2) d2x - 2xd(1-x^2)}{(1-x^2)^2 \left[1 + \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} \right]} = \\ &= \frac{2(1-x^2)dx + 4x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1+x^2) dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2dx}{1+x^2}. \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Remarque. — On a $d \text{ arc tg } x = \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d2x}{1+x^2}.$

Donc $d \text{ arc tg } x = \frac{1}{2} d. \text{ arc tg } \frac{2x}{1+x^2}.$

Ce que l'on vérifie aisément.

IX. $y = (a+x)^m \cdot (b+x)^n.$

Les principes

$$d(uv) = vdu + u dv, \quad du^n = nu^{n-1} du.$$

donnent :

$$\begin{aligned} dy &= (b+x)^n \cdot d(a+x)^m + (a+x)^m \cdot d(b+x)^n = \\ &= m \cdot (b+x)^n (a+x)^{m-1} d(a+x) + n (a+x)^m (b+x)^{n-1} d(b+x) = \\ &= m \cdot (b+x)^n (a+x)^{m-1} dx + n \cdot (a+x)^m (b+x)^{n-1} dx = \\ &= (b+x)^{n-1} (a+x)^{m-1} [m(b+x) + n(a+x)] dx. \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = [m(b+x) + n(a+x)].$$

X. $y = x^x. \quad (1).$

En prenant les logarithmes népériens de part et d'autre on a :

$$\log y = x \cdot \log x.$$

La différentiation des deux membres de cette équation donne :

$$\frac{dy}{y} = x \frac{dx}{x} + \log x \cdot dx.$$

D'où :

$$dy = x^x dx + x^x \log x \cdot dx.$$

$$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \log x) = x^x \log (ex).$$

XI. $y = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right).$

Les principes

$$d \log u = \frac{du}{u}, \quad d \operatorname{tg} = \frac{du}{\cos^2 u}$$

donnent successivement :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)} = \frac{\frac{d \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)}{\cos^2 \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)}}{\frac{\sin \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)}{\cos \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right) \cos \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)} = \frac{dx}{2 \sin \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right) \cos \left(45^\circ + \frac{x}{2} \right)} = \\ &= \frac{dx}{\sin \left(90^\circ + x \right)} = \frac{dx}{\sin \left(90^\circ - x \right)} = \frac{dx}{\cos x}. \end{aligned}$$

XII. $y = \log (x + \sqrt{1+x^2}).$

Les principes

$$d \log u = \frac{du}{u}, \quad d \sqrt{u} = \frac{du}{2 \sqrt{u}}$$

$$du^n = nu^{n-1} du.$$

donnent successivement :

$$\begin{aligned} dy &= \frac{d(x + \sqrt{1+x^2})}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + d\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{dx + \frac{d(1+x^2)}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \\ &= \frac{dx + \frac{2xdx}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{(x + \sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

**DIFFÉRENTIATION D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS FONCTIONS EXPLICITES
DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.**

Nous avons remarqué, dans la recherche des différentielles du produit d'un quotient et de u^v que : pour obtenir la différentielle de ces fonctions, lesquelles sont des combinaisons de fonctions, il faut considérer successivement chaque fonction comme seule variable, les autres comme constantes, différentier dans chaque hypothèse et faire la somme des résultats obtenus.

Ce principe est général.

Soit à déterminer la différentielle d'une fonction $f(u, v)$, u et v étant des fonctions explicites de x .

Désignons par y la fonction $f(u, v)$.

Si l'on donne à la variable indépendante x , l'accroissement Δx ; les fonctions u, v et y prennent les accroissements correspondants $\Delta u, \Delta v, \Delta y$, et l'on a :

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v),$$

ce que l'on peut écrire ainsi :

$$\Delta y = f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v) + f(u, v + \Delta v) - f(u, v).$$

La division par Δx des deux membres de cette équation donne :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta x},$$

ou ce qui revient au même :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (I)$$

En considérant dans $\frac{f(u + \Delta u, v + \Delta v) - f(u, v + \Delta v)}{\Delta u}$, v et Δv comme constantes, alors la limite de ce rapport est la dérivée de la fonction $f(u, v)$ prise par rapport à la variable u , comme si u était seule variable.

Nous désignerons cette dérivée par $f'_u(u, v)$.

De même en considérant u comme constante dans le rapport $\frac{f(u, v + \Delta v) - f(u, v)}{\Delta v}$; la limite de ce rapport est la dérivée de la fonction prise par rapport à v , comme si v était seule variable.

Nous désignerons cette dérivée par $f'_v(u, v)$. L'équation (1) devient donc en passant à la limite de Δx ,

$$\frac{dy}{dx} = f'_u(u, v) \cdot \frac{du}{dx} + f'_v(u, v) \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Par suite, la différentielle de la fonction $f(u, v)$ a pour expression :

$$df(u, v) = f'_u(u, v) \cdot du + f'_v(u, v) \cdot dv \dots\dots (a)$$

La notation différentielle appliquée aux fonctions dérivées $f'_u(u, v)$, $f'_v(u, v)$, nous conduit à écrire l'équation (a) de la manière suivante :

$$df(u, v) = \frac{df(u, v)}{du} \cdot du + \frac{df(u, v)}{dv} \cdot dv.$$

Ou plus simplement, en désignant $f(u, v)$ par f ,

$$df = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv.$$

C'est ici qu'il faut bien se garder de considérer les expressions $\frac{df}{du}$, $\frac{df}{dv}$ comme des rapports ; le signe df qui y entre, n'y représente pas le df du premier membre, lequel représente la différentielle totale de la fonction.

Le principe que nous venons de démontrer s'étend à une fonction $f(u, v, w, \dots)$ d'un nombre quelconque de fonctions implicites $u, v, w, \dots$ de la variable indépendante, en sorte que pour cette fonction, on a :

$$df = \frac{df}{du} \cdot du + \frac{df}{dv} \cdot dv + \frac{df}{dw} \cdot dw + \dots\dots$$

Remarque. — Si au lieu de la fonction $f(u, v)$, on avait eu la fonction $f(u, x)$ on aurait :

$$df = \frac{df}{du} \cdot du + \frac{df}{dx} \cdot dx.$$

Et en mettant les dérivées en évidence :

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{dx}.$$

Il faut bien remarquer ici que le $\frac{df}{dx}$ du premier membre n'est pas le $\frac{df}{dx}$ du second.

Le $\frac{df}{dx}$ du premier membre représente la dérivée de la fonction totale $f(u, x)$ prise par rapport à x ; tandis que le $\frac{df}{dx}$ du second membre représente la dérivée, prise par rapport à x , de la fonction $f(u, x)$ dans laquelle on considère u comme constante et x comme seule variable.

Afin d'éviter toute confusion dans l'équation précédente, nous l'écrivons ainsi :

$$\left(\frac{df}{dx}\right) = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{df}{dx}$$

Exemples de différentiation.

I. Soit à différentier la fonction

$$u = \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

D'après les principes

$$df(u, v) = \frac{df}{du} \cdot du + \frac{df}{dv} \cdot dv. \quad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

on a successivement :

$$\begin{aligned} du &= \frac{d \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}{2 \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} = \frac{(x^2 + y^2) d(x^2 - y^2) - (x^2 - y^2) d(x^2 + y^2)}{2 (x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} = \\ &= \frac{(x^2 + y^2) \cdot (2x dx - 2y dy) - (x^2 - y^2) (2x dx + 2y dy)}{2 (x^2 + y^2)^2 \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}} = \\ &= \frac{2xy (y dx - x dy)}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 - y^2}} \end{aligned}$$

II. $u = \sin(x^n y^n)$

$$\begin{aligned} du &= \cos(x^n y^n) d(x^n y^n) = (m y^n x^{n-1} dx + n x^n y^{n-1} dy) \cos(x^n y^n) = \\ &= x^{n-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy) \cos(x^n y^n). \end{aligned}$$

III. $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$

$$du = \frac{d \frac{x}{y}}{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\frac{y dx - x dy}{y^2}}{\frac{y^2 + x^2}{y^2}} = \frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

IV. $u = y \cdot e^x$

$$du = y \cdot d e^x + e^x dy = y \cdot e^x dx + e^x dy = e^x \cdot (y dx + dy)$$

$$\text{V. } u = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y}.$$

$$\begin{aligned} du &= \frac{(x+y) \cdot d(\sqrt{x} + \sqrt{y}) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) d(x+y)}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y) \left(\frac{dx}{2\sqrt{x}} + \frac{dy}{2\sqrt{y}} \right) - (\sqrt{x} + \sqrt{y}) (dx + dy)}{(x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y) (\sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy) - 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} (\sqrt{x} + \sqrt{y}) (dx + dy)}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} (x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y) (\sqrt{y} dx + \sqrt{x} dy) - 2(x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) (dx + dy)}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} (x+y)^2} = \\ &= \frac{(x+y) \left(\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} \right) - 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{y}{\sqrt{y}} \right) (dx + dy)}{2(x+y)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{VI. } u = \text{Log tg} \left(\frac{x}{y} \right).$$

$$\begin{aligned} du &= \frac{d \left(\frac{x}{y} \right)}{\text{tg} \frac{x}{y}} = \frac{\frac{d \left(\frac{x}{y} \right)}{\cos^2 \frac{x}{y}}}{\text{tg} \frac{x}{y}} = \frac{d \left(\frac{x}{y} \right)}{\sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \frac{\frac{y \cdot dx - x dy}{y^2}}{\sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \\ &= \frac{2(y \cdot dx - x dy)}{y^2 \sin \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y}} = \frac{2(y \cdot dx - x dy)}{y^2 \sin \left(2 \cdot \frac{x}{y} \right)}. \end{aligned}$$

$$\text{VII. } u = \frac{y \cdot x^2}{a^2 - x^2}.$$

$$du = \frac{(a^2 - x^2) dy x^2 - y x^2 d(a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2} = \frac{(a^2 - x^2) (2xy dx + x^2 dy) + 2yx^2 dx}{(a^2 - x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{VIII. } u &= \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \log (x + \sqrt{x^2 - y^2}) - \\ &\quad - \log (x - \sqrt{x^2 - y^2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
du &= \frac{d(x + \sqrt{x^2 - y^2})}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{d(x - \sqrt{x^2 - y^2})}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = \\
&= \frac{dx + \frac{d(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 - y^2}}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{dx - \frac{d(x^2 - y^2)}{2\sqrt{x^2 - y^2}}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = \\
&= \frac{dx + \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{dx - \frac{xdx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} = \\
&= \frac{(x + \sqrt{x^2 - y^2}) dx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2 - y^2})} + \frac{(x - \sqrt{x^2 - y^2}) dx - ydy}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (x - \sqrt{x^2 - y^2})} = \\
&= \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (x + \sqrt{x^2 - y^2})} + \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \\
&\quad \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2} \cdot (x - \sqrt{x^2 - y^2})} = \\
&= \frac{2dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} - \frac{ydy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \cdot \left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} \right) = \\
&= \frac{2(ydx - xdy)}{y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS IMPLIQUES.

Différencier une fonction implicite $f(x, y) = 0$, c'est déterminer le rapport $\frac{dy}{dx}$ sans résoudre l'équation.

Ici y est une fonction de la variable indépendante x , car on peut toujours concevoir l'équation $f(x, y) = 0$, résolue par rapport à x .

Si l'on avait :

$$u = f(x, y),$$

on aurait :

$$du = \frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dx} dx \dots \dots \dots (1)$$

Dans le cas de $f(x, y) = 0$, u est constante et égale à zéro; alors $du = 0$ et l'équation (1) nous donne :

$$\frac{df}{dy} dy + \frac{df}{dx} dx = 0.$$

Et par suite :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

Rappelons ici que la notation $\frac{df}{dx}$ représente la dérivée de $f(x, y)$ prise par rapport à x , en considérant y comme constante ; la notation $\frac{df}{dy}$ représente la dérivée de $f(x, y)$, prise par rapport à y , en considérant x comme constante.

Les équations connues des sections coniques

$$\left. \begin{aligned} a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 &= 0 \\ a^2y^2 - b^2x^2 + a^2b^2 &= 0 \\ y^2 - 2px &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ donnent : } \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= - \frac{b^2x}{a^2y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{b^2x}{a^2y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{p}{y} \end{aligned}$$

En sorte que les équations des tangentes à ces courbes en un point x', y' sont :

$$y - y' = - \frac{b^2x'}{a^2y'} (x - x') \text{ pour l'ellipse.}$$

$$y - y' = \frac{b^2x'}{a^2y'} (x - x') \text{ pour l'hyperbole.}$$

$$y - y' = \frac{p}{y'} (x - x') \text{ pour la parabole.}$$

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS DES FONCTIONS EXPLICITES D'UNE SEULE VARIABLE.

Soit une fonction de x , $y = f(x)$.

Que x soit ou ne soit pas la variable indépendante, on a :

$$dy = f'(x).dx. \quad (1)$$

Si x est la variable indépendante, dx est une quantité numérique considérée comme constante, et l'équation (1) montre que la différentielle dy de la variable dépendante y étant le produit $f'(x)dx$, lequel est une fonction de x , est elle-même une certaine fonction de x .

Donc si x n'est pas la variable indépendante, dx est une fonction, puisque alors x est variable dépendante.

dy étant une fonction, on pourra prendre la différentielle de dy ; on la nomme la *différentielle seconde* de y , et on la désigne par $d.dy$ ou plus simplement d^2y . En prenant de même la différentielle de la fonction d^2y , on a $d.d^2y$ ou d^3y (différentielle troisième); et ainsi de suite.

On désigne par $d^4y, \dots, d^ny$ les différentielles *quatrième, ..., n^{ième}* de la variable y .

Si x n'est pas la variable indépendante, on pourra prendre les différentielles successives de dx , lesquelles seront représentées par $d^2x, d^3x, \dots, d^nx$.

Si x est la variable indépendante, dx étant constant, il en résulte que $d^2x = 0, d^3x = 0, \dots$. On sait en effet que la différentielle d'une constante est nulle.

Les dérivées successives d'une fonction $f(x)$ se désignent par les notations $f'(x), f''(x), \dots, f^n(x)$.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS D'UNE FONCTION EXPLICITE DE LA VARIABLE INDÉPENDANTE.

Soit la fonction $y = f(x)$, x étant la variable indépendante, on en tire :

$$dy = f'(x).dx. \quad (1)$$

Et en différentiant successivement, il vient d'après le principe $d(au) = a.du$, puisqu'ici dx est constant.

$$\left. \begin{array}{l} (2) \dots d^2y = f''(x).dx.d x = f''(x).dx^2 \\ (3) \dots d^3y = f'''(x).dx.d x^2 = f'''(x).dx^3 \\ (4) \dots d^4y = f^{(4)}(x).dx.d x^3 = f^{(4)}(x).dx^4 \\ \vdots \\ (n) \dots d^ny = f^{(n)}(x).dx^n \end{array} \right\} \text{d'où :} \left\{ \begin{array}{l} f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \\ f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} \\ f^{(4)}(x) = \frac{d^4y}{dx^4} \\ \vdots \\ f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} \end{array} \right.$$

Les équations (1), (2), (3), ..., (n) pourront donc s'écrire ainsi :

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2$$

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot dx^3$$

$$d^4y = \frac{d^4y}{dx^4} \cdot dx^4$$

$$d^ny = \frac{d^ny}{dx^n} \cdot dx^n$$

Et afin que ces équations ne représentent pas des identités, il faudra y considérer les rapports $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ..., $\frac{d^ny}{dx^n}$ comme des notations.

DIFFÉRENTIELLES DES ORDRES SUPÉRIEURS D'UNE FONCTION EXPLICITE D'UNE FONCTION, DONT LA VARIABLE N'EST PAS INDÉPENDANTE.

Soit la fonction $y = f(x)$, x n'étant pas la variable indépendante. Le théorème des fonctions de fonctions donne :

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (1)$$

Ici dx est une fonction.

L'équation (1) donne en différentiant successivement, d'après le principe $df(u, v) = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv$ et en adoptant les notations indiquées et employées ci-dessus :

$$d^2y = f''(x) \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} d^2y &= f''(x) dx^2 + 2f'(x) \cdot dx \cdot dx + f''(x) dx \cdot dx^2 + f'(x) \cdot d^2x \\ &= f''(x) \cdot dx^2 + 3f'(x) \cdot dx \cdot dx + f'(x) \cdot d^2x. \end{aligned} \quad (3)$$

Alors que x n'est pas la variable indépendante, le théorème des fonctions de fonctions donne $dy = f'(x) \cdot dx$, en sorte que le rapport $\frac{dy}{dx}$ représente encore la dérivée $f'(x)$; mais les équations (2) et (3) montrent que les rapports $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ ne représentent pas les dérivées seconde et troisième, $f''(x)$, $f'''(x)$.

Néanmoins nous conviendrons, par extension de la notation différentielle, de représenter les dérivées $f''(x)$, $f'''(x)$, ... par les notations $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, en sorte que les équations (1), (2), (3), ... dans lesquelles x n'est pas la variable indépendante, s'écriront ainsi :

$$dy = \frac{dy}{dx} \cdot dx.$$

$$d^2y = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx^2 + \frac{dy}{dx} \cdot d^2x.$$

$$d^3y = \frac{d^3y}{dx^3} \cdot dx^3 + 3 \frac{d^2y}{dx^2} \cdot dx \cdot d^2x + \frac{dy}{dx} \cdot d^3x.$$

Nous le rappelons encore, il faut bien, dans ces équations, ne considérer les expressions $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ... que comme des notations.

Exemples de différentiations successives.

I. Déterminer les différentielles successives de la fonction :

$$y = x^m.$$

Supposons que x soit variable indépendante, alors, d'après les principes $du^m = mu^{m-1}du$ et $dau = adu$, on a successivement, puisque ici a est une constante :

$$dy = mx^{m-1}dx$$

$$d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2$$

$$d^3y = m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3$$

$$d^n y = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)x^{m-n}dx^n.$$

Supposons que x soit variable dépendante, alors dx est une fonction, et d'après les principes $du^m = mu^{m-1}du$ et

$$df(u, v, w, \dots) = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv + \frac{df}{dw} dw + \dots$$

On a successivement :

$$dy = mx^{m-1}dx.$$

$$d^2y = m(m-1)x^{m-2}dx^2 + m x^{m-1}d^2x.$$

$$\begin{aligned} d^3y &= m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3 + 2m(m-1)x^{m-2}dx \cdot d^2x + \\ &\quad + m(m-1)x^{m-2}dx \cdot d^2x + m x^{m-1}d^3x. = \\ &= m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3 + 3m(m-1)x^{m-2}dx \cdot d^2x + m x^{m-1}d^3x. \end{aligned}$$

II. Déterminer les différentielles successives de la fonction :

$$y = \frac{1}{x^a}.$$

Cette fonction rentre dans la précédente, car $\frac{1}{x^a} = x^{-a}$.

III. Déterminer les différentielles successives de la fonction :

$$y = a^x.$$

Si x est variable indépendante, les principes $da^x = a^x \log a \, dx$ et $da^u = a^u$ donnent successivement :

$$dy = a^x \log a \, dx.$$

$$d^2y = \log a \, dx \cdot da^x = a^x (\log a)^2 dx^2.$$

$$d^3y = (a^x \log a)^2 dx^2 \cdot da^x = a^x (\log a)^3 dx^3.$$

$$d^4y = a^x (\log a)^4 dx^4.$$

Si x est variable dépendante, alors les principes $da^u = a^u \log a \, du$ et $df(u, v, \dots) = \frac{df}{du} du + \frac{df}{dv} dv + \dots$ donnent successivement :

$$dy = a^x \log a \, dx.$$

$$d^2y = a^x (\log a)^2 dx^2 + a^x \log a \, d^2x.$$

$$d^3y = a^x (\log a)^3 dx^3 + 2a^x (\log a)^2 dx \, d^2x + a^x (\log a)^2 dx \, d^2x + a^x \log a \, d^3x.$$

$$= a^x \{ (\log a)^3 dx^3 + 3a^x (\log a)^2 dx \, d^2x + a^x \log a \, d^3x \}.$$

IV. Déterminer les différentielles successives de la fonction :

$$y = \sin ax.$$

Supposons d'abord x variable indépendante, alors les principes $d \sin u = \cos u \, du$, $d \cos u = -\sin u \, du$ et $da^u = a^u$ donnent successivement :

$$dy = \cos nx \, d(nx) = n \cdot \cos nx \cdot dx.$$

$$d^2y = -n \cdot \sin nx \, dnx \cdot dx = -n^2 \sin nx \, dx^2.$$

$$d^3y = -n^2 \cos nx \, dnx \cdot dx^2 = -n^3 \cos nx \, dx^3.$$

$$d^4y = +n^3 \sin nx \, dnx \, dx^3 = +n^4 \sin nx \, dx^4.$$

Si x est variable dépendante, on applique les principes $d \sin u = \cos u \, du$, $d \cos u = -\sin u \, du$ et $df(u, v) = \frac{df}{du} \cdot du + \dots$ et l'on a successivement :

$$dy = \cos nx \, d(nx) = n \cdot \cos nx \, dx.$$

$$d^2y = -n \cdot \sin nx \, dnx \cdot dx + n \cdot \cos nx \, d^2x = -n^2 \sin nx \, dx^2 + n \cdot \cos nx \, d^2x.$$

$$d^3y = -n^2 \cos nx \, dnx \cdot dx^2 - 2n^2 \sin nx \, dx \, d^2x + n \sin nx \, dnx \, d^2x + n \cdot \cos nx \cdot d^3x.$$

$$= -n^3 \cos nx \, dx^3 - 3n^2 \sin nx \, dx \, d^2x + n \cdot \cos nx \, d^3x.$$

V. Déterminer les différentielles successives de la fonction :

$$y = \text{Log } x.$$

Supposons d'abord x variable indépendante; l'application des principes $d \log u = \frac{du}{u}$, $\text{Log } e$, et $du^m = am u^{m-1} du$ donne :

$$dy = \frac{dx}{x} \text{Log } e = x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot dx.$$

$$d^2y = -1 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 = -\frac{\text{Log } e}{x^2} dx^2.$$

$$d^3y = 1 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^3 = +\frac{1 \cdot 2 \cdot \text{Log } e}{x^3} dx^3.$$

$$d^4y = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \cdot \text{Log } e \cdot dx^4 = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{Log } e}{x^4} dx^4.$$

$$dy^{2n+1} = +1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n) \cdot x^{-2n-1} \text{Log } e \cdot dx^{2n+1} =$$

$$= +\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n \cdot \text{Log } e}{x^{2n+1}} dx^{2n+1}.$$

$$dy^{2n+2} = -1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1) \cdot x^{-2n-2} \text{Log } e \cdot dx^{2n+2} =$$

$$= -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2n+1) \text{Log } e}{x^{2n+2}} dx^{2n+2}.$$

Si x est variable dépendante, l'application des principes $d \text{Log } u = \frac{du}{u} \cdot \text{Log } e$, $du^m = am u^{m-1} du$ et $df(u, v) = \frac{df}{du} \cdot du + \dots$ donne successivement :

$$dy = \frac{dx}{x} \cdot \text{Log } e = x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot dx.$$

$$d^2y = -1 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 + x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot d^2x.$$

$$d^2y = +1 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 - 2 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx \cdot d^2x -$$

$$+ x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot d^2x^2.$$

$$= +1 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 - 3 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx \cdot d^2x + x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot d^3x.$$

$$d^4y = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \cdot \text{Log } e \cdot dx^4 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 d^2x +$$

$$+ 2 \cdot 3 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 d^2x.$$

$$+ 3 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot (d^2x)^2 - 3 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx d^3x$$

$$- 1 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx d^3x + x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot d^4x$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \cdot \text{Log } e \cdot dx^4 + 1 \cdot 2 \cdot x^{-3} \cdot \text{Log } e \cdot dx^2 d^2x -$$

$$- 3x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot (d^2x)^2 -$$

$$- 4 \cdot x^{-2} \cdot \text{Log } e \cdot dx d^3x + x^{-1} \cdot \text{Log } e \cdot d^4x.$$

VI. PROBLÈME. — On donne l'équation :

$$u + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} = 0. \quad (1)$$

dans laquelle $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$ représentent par notation, les dérivées première et seconde d'une certaine fonction u prises par rapport à x .
 x est donnée par l'équation

$$x^2 = 4z.$$

z est ici la variable indépendante. — On demande d'exprimer l'équation (1) en fonction de u et de z .

Quoique x soit variable dépendante, le rapport $\frac{du}{dx}$ représente encore la dérivée première (page 105); quant à la dérivée seconde représentée par $\frac{d^2u}{dx^2}$, elle a pour valeur :

$$\frac{d \frac{du}{dx}}{dx} = \frac{d^2u \cdot dx - du \cdot d^2x}{dx^3}.$$

En sorte que l'équation (1) devient par substitution :

$$u + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \frac{d^2u \cdot dx - du \cdot d^2x}{dx^3} = 0.$$

ou ce qui revient au même en y introduisant les rapports $\frac{du}{d\theta}$, $\frac{d^2u}{d\theta^2}$, $\frac{dx}{d\theta}$, $\frac{d^2x}{d\theta^2}$:

$$u + \frac{1}{x} \cdot \frac{\frac{du}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} + \frac{\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \frac{dx}{d\theta} - \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{d^2x}{d\theta^2}}{\frac{dx}{d\theta}^3} = 0. \quad (2)$$

L'équation $x^2 = 4\theta$, ou $x = 2\theta^{\frac{1}{2}}$, donne en la différentiant deux fois afin d'avoir dx et d^2x , et puisque θ est variable indépendante :

$$x \, dx = 2 \, d\theta, \text{ d'où : } \frac{dx}{d\theta} = 2 \frac{1}{x} = \frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}}}.$$

$x \, d^2x + dx^2 = 0$, d'où : $x \frac{d^2x}{d\theta^2} + \frac{dx}{d\theta}^2 = 0$, et par substitution :

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} = -\frac{1}{2\theta^{\frac{3}{2}}}.$$

La substitution des valeurs de x , $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{d^2x}{d\theta^2}$ dans (2) donne :

$$u + \frac{1}{2\theta^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\frac{du}{d\theta}}{\frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}}}} + \frac{\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \frac{1}{\theta^{\frac{1}{2}}} + \frac{du}{d\theta} \cdot \frac{1}{2\theta^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\theta^{\frac{3}{2}}}} = 0.$$

d'où finalement :

$$u + \frac{du}{d\theta} + \theta \frac{d^2u}{d\theta^2} = 0.$$

Telle est l'expression cherchée. —

SÉRIES DE TAYLOR ET DE MAC-LAURIN.

Série de Taylor.

Soit à déterminer le développement $f(x+h)$ que présente la fonction $f(x)$, lorsqu'on donne à la variable x un accroissement arbitraire h .

En représentant par H le rapport inconnu de l'accroissement de la fonction $f(x)$, à l'accroissement h de x , on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = H \quad (1)$$

H est ici une fonction de x et de h , laquelle devient $f'(x)$ lorsque h devient nul.

L'équation (1) donne :

$$f(x+h) = f(x) + H.h \quad (2)$$

Ici x et h sont toutes deux variables, et comme elles ne sont liées entre elles par aucune relation, on peut les assujettir à telle condition que l'on voudra.

Supposons donc qu'on les fasse varier de telle sorte que leur somme reste constante et soit a cette somme constante, alors $x+h=a$, $h=a-x$ et l'équation (2) devient :

$$f(a) = f(x) + H(a-x) \quad (3)$$

Dans cette nouvelle équation H est une fonction d' x .

L'équation (3) donne en prenant les dérivées successives d'après le principe :

$$\frac{df(u, v)}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx} + \frac{df}{dv} \frac{dv}{dx}$$

$$0 = f'(x) + H'(a-x) - H \quad (4)$$

$$0 = f''(x) + H''(a-x) - 2H' \quad (5)$$

$$0 = f'''(x) + H'''(a-x) - 3H'' \quad (6)$$

$$0 = f^{(4)}(x) + H^{(4)}(a-x) - 4H''' \quad (7)$$

Afin d'éliminer H, H', H'', H''', ... dans ces équations, je multiplie respectivement les équations (3), (4), (5), (6), (7), par 1, $a-x$, $\frac{(a-x)^2}{1.2}$, $\frac{(a-x)^3}{1.2.3}$, $\frac{(a-x)^4}{1.2.3.4}$, ... et en ajoutant les nouvelles équations obtenues par ces multiplications, il vient après réduction :

$$f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{(a-x)^2}{1.2}f''(x) + \frac{(a-x)^3}{1.2.3}f'''(x) + \dots$$

Et puisque $a = x+h$, $a-x = h$, il vient finalement :

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \dots$$

Telle est la série de Taylor.

Cette série donne le développement de $f(x+h)$ d'après les puissances entières et ascendantes de l'accroissement h .

Pour une fonction entière de x , $f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots$ on obtient aisément le développement

$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots$$

par la formule du binôme.

Série de Mac-Laurin. — Dans la série de Taylor, si l'on change h en x et réciproquement, on a :

$$f(x+h) = f(h) + x.f'(h) + \frac{x^2}{1.2} f''(h) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(h) + \dots$$

Et en faisant $h = 0$, il vient :

$$f(x) = f(0) + x.f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \dots$$

Telle est la série de Mac-Laurin.

Cette série donne le développement d'une fonction, d'après les puissances ascendantes et entières de la variable x .

Forme particulière sous laquelle on peut développer une fonction.

Soit une fonction d' x , $f(x)$; quel que soit x , on a l'identité :

$$f(x) = f(a + x - a).$$

Et en développant le second membre d'après la série de Taylor, il vient :

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

Série de Taylor à deux variables.

Si dans la fonction $f(x, y)$ on considère d'abord x comme seule variable en donnant à x un accroissement h , on aura d'après la série de Taylor :

$$(1) \dots f(x+h, y) = f(x, y) + h.f'_x(x, y) + Mh^2;$$

M étant l'ensemble des termes dans lesquels on peut mettre h^2 en facteur commun.

Dans l'équation (1) considérons y comme seule variable, alors en donnant à y l'accroissement k , nous aurons :

$$(2)... f(x+h, y+k) = f(x, y+k) + h \cdot f'_x(x, y+k) + Mh^2.$$

La série de Taylor appliquée aux fonctions $f(x, y+k)$ et $h \cdot f'_x(x, y+k)$ dans lesquelles y est considérée comme seule variable donne les développements :

$$(3)... f(x, y+k) = f(x, y) + k \cdot f'_y(x, y) + Pk^2.$$

$$(4)... h \cdot f'_x(x, y+k) = h \cdot f'_x(x, y) + kh \cdot f''_{xy}(x, y) + \dots$$

L'addition des équations (2), (3) et (4) donne après réduction :

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + h \cdot f'_x(x, y) + Mh^2 \\ &\quad + k \cdot f'_y(x, y) + Pk^2 \\ &\quad + Qkh. \end{aligned}$$

Telle est la série de Taylor à deux variables, bornée aux termes du développement, contenant la première puissance des accroissements k et h .

APPLICATIONS DES SÉRIES DE TAYLOR ET DE MAC-LAURIN.

Développement de $\text{Log}(x+h)$ et calcul des logarithmes des nombres.

D'après le principe $\frac{d \text{Log } u}{du} = \frac{\text{Log } e}{u}$, on a en prenant les dérivées successives de la fonction $f(x) = \text{Log}(x)$:

$$f(x) = \text{Log } x, f'(x) = \frac{\text{Log } e}{x}, f''(x) = -\frac{\text{Log } e}{x^2}, f'''(x) = \frac{1.2. \text{Log } e}{x^3}, \dots$$

La série de Taylor donne donc :

$$(1)... \text{Log}(x+h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \dots \right).$$

Tel est le développement de $\text{Log}(x+h)$.

En remplaçant h par $-h$ dans ce développement, il vient :

$$(2)... \text{Log}(x-h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left(-\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} - \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} - \dots \right).$$

En retranchant (2) de (1), les termes contenant les puissances paires de h disparaissent, les termes contenant les puissances impaires de h se doublent, et l'on trouve :

$$\text{Log } (x+h) - \text{Log } (x-h) = 2 \text{ Log } e \left[\frac{h}{x} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^5}{5x^5} + \dots \right]$$

ou bien :

$$\text{Log } \left(\frac{x+h}{x-h} \right) = 2 \text{ Log } e \left[\frac{h}{x} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^5}{5x^5} + \dots \right]$$

Cette série devient en y faisant $x = 1$:

$$(a) \dots \text{Log } \left(\frac{1+h}{1-h} \right) = 2 \text{ Log } e \left[\frac{h}{1} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots \right]$$

Et si l'on pose :

$$\frac{1+h}{1-h} = 1 + \frac{1}{n} \text{ on aura : } h = \frac{1}{2n+1},$$

en sorte que l'équation (a) devient :

$$\text{Log } \left(\frac{n+1}{n} \right) = 2 \text{ Log } e \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

d'où :

$$\text{Log } (n+1) = \text{Log } n + 2 \text{ Log } e \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

Telle est la série au moyen de laquelle on calcule les logarithmes des nombres.

Remarque. — La série :

$$\text{Log } (x+h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left[\frac{h}{x} - \frac{h^3}{2x^3} + \dots \right]$$

donne pour un autre accroissement h' :

$$\text{Log } (x+h') = \text{Log } x + \text{Log } e \left[\frac{h'}{x} - \frac{h'^3}{2x^3} + \dots \right]$$

De ces équations, on tire :

$$\frac{\text{Log } (x+h) - \text{Log } x}{\text{Log } (x+h') - \text{Log } x} = \frac{h \left(1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^3}{3x^3} + \dots \right)}{h' \left(1 - \frac{h'}{2x} + \frac{h'^3}{3x^3} + \dots \right)}$$

Cette équation montre que pour des valeurs de plus en plus grandes

de x , le second membre se rapproche de plus en plus du rapport $\frac{h}{x}$.

Donc : à mesure que les nombres augmentent, le rapport de leurs accroissements tend à devenir égal à celui des accroissements de leurs logarithmes.

Développements de $\log(1+x)$ et de $\log(1-x)$.

Reprenons les développements :

$$\log(x+h) = \log x + \log e \left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots \right].$$

$$\log(x-h) = \log x + \log e \left[-\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} - \frac{h^3}{3x^3} - \dots \right].$$

Si l'on y suppose que e soit la base des logarithmes, si de plus on y fait $x=1$, et si l'on y remplace h par x , il vient :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Expressions du sinus et du cosinus d'un arc en fonction des exponentielles

imaginaires $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{-x\sqrt{-1}}$

On a :

$$d. \cos x = -\sin x. dx. \dots \dots (1)$$

$$d. \sin x = \cos x. dx.$$

Et en multipliant par $\sqrt{-1}$ cette dernière équation :

$$\sqrt{-1}. d. \sin x = \sqrt{-1}. \cos x. dx \quad (*)$$

ou bien :

$$d(\sqrt{-1}. \sin x) = \sqrt{-1}. \cos x. dx. \dots \dots (2)$$

(*) Par définition, on dit que la dérivée d'une expression imaginaire de la forme

$$F(x) + \sqrt{-1}. f(x) \text{ est } F'(x) + \sqrt{-1}. f'(x),$$

Et $d[F(x) + \sqrt{-1}. f(x)] = F'.dx + \sqrt{-1}. f'(x).dx$

En retranchant (2) de (1), les termes contenant les puissances paires de h disparaissent, les termes contenant les puissances impaires de h se doublent, et l'on trouve :

$$\text{Log}(x+h) - \text{Log}(x-h) = 2 \text{Log} e \left[\frac{h}{x} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^5}{5x^5} + \dots \right]$$

ou bien :

$$\text{Log} \left(\frac{x+h}{x-h} \right) = 2 \text{Log} e \left[\frac{h}{x} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^5}{5x^5} + \dots \right]$$

Cette série devient en y faisant $x = 1$:

$$(a) \dots \text{Log} \left(\frac{1+h}{1-h} \right) = 2 \text{Log} e \left[\frac{h}{1} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} + \dots \right]$$

Et si l'on pose :

$$\frac{1+h}{1-h} = 1 + \frac{1}{n} \text{ on aura : } h = \frac{1}{2n+1},$$

en sorte que l'équation (a) devient :

$$\text{Log} \left(\frac{n+1}{n} \right) = 2 \text{Log} e \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

d'où :

$$\text{Log}(n+1) = \text{Log} n + 2 \text{Log} e \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right]$$

Telle est la série au moyen de laquelle on calcule les logarithmes des nombres.

Remarque. — La série :

$$\text{Log}(x+h) = \text{Log} x + \text{Log} e \left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \dots \right]$$

donne pour un autre accroissement h' :

$$\text{Log}(x+h') = \text{Log} x + \text{Log} e \left[\frac{h'}{x} - \frac{h'^2}{2x^2} + \dots \right]$$

De ces équations, on tire :

$$\frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log} x}{\text{Log}(x+h') - \text{Log} x} = \frac{h \left(1 - \frac{h}{2x} + \frac{h^2}{3x^2} + \dots \right)}{h' \left(1 - \frac{h'}{2x} + \frac{h'^2}{3x^2} + \dots \right)}$$

Cette équation montre que pour des valeurs de plus en plus grandes

de x , le second membre se rapproche de plus en plus du rapport $\frac{h}{x}$.

Donc : à mesure que les nombres augmentent, le rapport de leurs accroissements tend à devenir égal à celui des accroissements de leurs logarithmes.

Développements de $\log(1+x)$ et de $\log(1-x)$.

Reprenons les développements :

$$\text{Log}(x+h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left[\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots \right].$$

$$\text{Log}(x-h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left[-\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} - \frac{h^3}{3x^3} - \dots \right].$$

Si l'on y suppose que e soit la base des logarithmes, si de plus on y fait $x = 1$, et si l'on y remplace h par x , il vient :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

Expressions du sinus et du cosinus d'un arc en fonction des exponentielles

imaginaires $e^{x\sqrt{-1}}$, $e^{-x\sqrt{-1}}$

On a :

$$d. \cos x = -\sin x. dx, \dots \quad (1)$$

$$d. \sin x = \cos x. dx.$$

Et en multipliant par $\sqrt{-1}$ cette dernière équation :

$$\sqrt{-1}. d. \sin x = \sqrt{-1}. \cos x. dx \quad (*)$$

ou bien :

$$d(\sqrt{-1}. \sin x) = \sqrt{-1}. \cos x. dx, \dots \quad (2)$$

(*) Par définition, on dit que la dérivée d'une expression imaginaire de la forme

$$F(x) + \sqrt{-1}. f(x) \text{ est } F'(x) + \sqrt{-1}. f'(x),$$

Et $d[F(x) + \sqrt{-1}. f(x)] = F'(x)dx + \sqrt{-1}. f'(x)dx, \dots$

Et en ajoutant (1) et (2) il vient :

$$d. \cos x + d(\sqrt{-1} \sin x) = \sqrt{-1}. \cos x. dx - \sin x. dx.$$

ou ce qui est la même chose :

$$d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \sqrt{-1}. \cos x. dx + (\sqrt{-1})^2 \sin x. dx.$$

Et par suite en mettant $\sqrt{-1}. dx$ en facteur commun dans le second membre :

$$d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x) \sqrt{-1}. dx.$$

D'où :

$$\frac{d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)}{\cos x + \sqrt{-1} \sin x} = \sqrt{-1}. dx.$$

Or :

$$\frac{d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)}{\cos x + \sqrt{-1} \sin x} = d. \log(\cos x + \sqrt{-1} \sin x).$$

$$\sqrt{-1}. dx = d. (x. \sqrt{-1}).$$

On a donc :

$$(3)..... d \log(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = d(x \sqrt{-1}).$$

Mais on sait que si les différentielles de deux fonctions sont égales, les fonctions ne diffèrent que par une constante.

L'équation (3) donne donc, C étant constante :

$$(4)..... \log(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = x. \sqrt{-1} + C.$$

Afin d'avoir la valeur de la constante C, je fais $x=0$ dans (4) et j'ai :

$$\log 1 = C. \quad \text{D'où } C = 0.$$

L'équation (4) devient alors :

$$\log(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = x. \sqrt{-1}.$$

Puisque e est la base des logarithmes, cette équation donne :

$$(5)..... \cos x + \sqrt{-1} \sin x = e^{x \sqrt{-1}}.$$

Cette nouvelle équation devient, en y remplaçant x par $-x$ et en remarquant que $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

$$(b) \dots \cos x = \sqrt{-1} \cdot \sin x = e^{-x\sqrt{-1}}$$

Des équations (a) et (b), on tire :

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Telles sont les expressions cherchées.

Développement en série de l'expression

$$\operatorname{tg} x = m \cdot \operatorname{tg} a.$$

L'équation

$$\operatorname{tg} x = m \cdot \operatorname{tg} a \text{ donne :}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = m \cdot \frac{\sin a}{\cos a}$$

Et en remplaçant ici les sinus et cosinus par leurs expressions en fonction des exponentielles imaginaires, il vient :

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = m \cdot \frac{e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}}{e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}}$$

Où ce qui revient au même puisque $e^{-u\sqrt{-1}} = \frac{1}{e^{u\sqrt{-1}}}$

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} = m \cdot \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - 1}{e^{2a\sqrt{-1}} + 1}$$

De cette équation, on tire pour la valeur de $e^{2x\sqrt{-1}}$:

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{(1+m)e^{2a\sqrt{-1}} + 1 - m}{(1-m)e^{2a\sqrt{-1}} + 1 + m}$$

Ou bien :

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{2a\sqrt{-1}} + \frac{1-m}{1+m}}{\left(\frac{1-m}{1+m}\right) e^{2a\sqrt{-1}} + 1}$$

Appelons u le rapport $\frac{1-m}{1+m}$ et nous aurons en mettant $e^{2a\sqrt{-1}}$ en facteur au numérateur du second membre

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \left(e^{2a\sqrt{-1}} \right) \cdot \frac{1+u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}}{1+u \cdot e^{2a\sqrt{-1}}}$$

D'où en prenant les logarithmes népériens des deux membres de cette équation, il vient :

$$2x\sqrt{-1} = 2a\sqrt{-1} + \log(1+u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1+u \cdot e^{2a\sqrt{-1}})$$

Et par suite :

$$(1) \dots x = a + \frac{\log(1+u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1+u \cdot e^{2a\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}}$$

Il ne reste plus qu'à développer en série la partie située à droite de a , à cet effet dans le développement :

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

Remplaçons successivement x par $u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}$ et par $u \cdot e^{2a\sqrt{-1}}$, nous aurons :

$$\begin{aligned} \log(1+u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}}) &= u \cdot e^{-2a\sqrt{-1}} - \frac{u^2}{2} e^{-4a\sqrt{-1}} + \\ &+ \frac{u^3}{3} e^{-6a\sqrt{-1}} - \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(1+u \cdot e^{2a\sqrt{-1}}) &= u \cdot e^{2a\sqrt{-1}} - \frac{u^2}{2} e^{4a\sqrt{-1}} + \\ &+ \frac{u^3}{3} e^{6a\sqrt{-1}} - \dots \end{aligned}$$

Et par soustraction, en ordonnant par rapport aux puissances de u :

$$\log(1+ue^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1+ue^{2a\sqrt{-1}}) = -u(e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}) + \frac{u^2}{2}(e^{4a\sqrt{-1}} - e^{-4a\sqrt{-1}}) - \frac{u^3}{3}(e^{6a\sqrt{-1}} - e^{-6a\sqrt{-1}}) + \dots$$

Les deux membres de cette équation divisés par $2\sqrt{-1}$ donnent :

$$\frac{\log(1+ue^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1+ue^{2a\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} = -u \frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \frac{u^2}{2} \frac{e^{4a\sqrt{-1}} - e^{-4a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \frac{u^3}{3} \frac{e^{6a\sqrt{-1}} - e^{-6a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \dots$$

Mais d'après le calcul du sinus d'un arc en fonction des exponentielles imaginaires, on a :

$$\frac{e^{2a\sqrt{-1}} - e^{-2a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 2a, \quad \frac{e^{4a\sqrt{-1}} - e^{-4a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin 4a, \text{ etc.}$$

L'équation précédente devient donc :

$$\frac{\log(1+ue^{-2a\sqrt{-1}}) - \log(1+ue^{2a\sqrt{-1}})}{2\sqrt{-1}} = -u \sin 2a + \frac{u^2}{2} \sin 4a - \frac{u^3}{3} \sin 6a + \dots$$

L'équation (1) donne donc par substitution :

$$x = a - u \sin 2a + \frac{u^2}{2} \sin 4a - \frac{u^3}{3} \sin 6a + \dots$$

Telle est l'expression demandée.

Développement de $\sin x$.

Soit la fonction $f(x) = \sin x$ en prenant les dérivées successives, on a :

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x \\ f''(x) &= -\sin x \\ f'''(x) &= -\cos x \\ f^{(4)}(x) &= +\sin x \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Et en faisant } x=0 \\ &\text{dans toutes ces} \\ &\text{équations, on} \\ &\text{trouve :} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 0 \\ f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Par conséquent, la série de Mac-Laurin appliquée à la fonction $f(x) = \sin x$, nous donne :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \dots$$

Développement de $\cos x$.

Soit la fonction $f(x) = \cos x$; ses dérivées successives sont :

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos x \\ f'(x) = -\sin x \\ f''(x) = -\cos x \\ f'''(x) = +\sin x \\ f^{(4)}(x) = +\cos x \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Et en faisant } x = 0 \\ \text{dans ces équations,} \\ \text{il vient :} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f'(0) = 0 \\ f''(0) = -1 \\ f'''(0) = 0 \\ f^{(4)}(0) = +1 \end{array} \right.$$

Et la série de Mac-Laurin, appliquée à la fonction $f(x) = \cos x$, donne :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

Ce développement se déduit aisément en différentiant le développement de $\sin x$.

Remarque. — Les formules que nous venons de trouver :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

ne sont pas homogènes. Afin de les employer dans le calcul, il faut remarquer que l'arc x étant exprimé en secondes, on a l'équation :

$$\frac{\text{longueur arc } x''}{\text{angle } x''} = \frac{\text{longueur arc } 1''}{\text{angle } 1''}$$

Cette équation devient en prenant, suivant l'usage, angle $1''$ pour unité :

$$\text{longueur arc } x'' = x \text{ arc } 1''$$

Et en remplaçant arc $1''$ par $\sin 1''$, on a :

longueur arc $x'' = x \cdot \sin 1''$.

Les formules qui donnent $\sin x$ et $\cos x$, deviennent donc par substitution :

$$\sin x = x \sin 1'' - \frac{x^3 \sin^3 1''}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5 \sin^5 1''}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2 \sin^2 1''}{1 \cdot 2} + \frac{x^4 \sin^4 1''}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

Dans ces formules, le rayon du cercle, dans lequel on considère les lignes trigonométriques, est supposé égal à l'unité.

Développements de e^x et de a^x .

La fonction $f(x) = e^x$ et ses dérivées successives donne

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ces équations} \\ \text{deviennent} \\ \text{pour } x = 0. \end{array} \left\{ \begin{aligned} f(0) &= 1. \\ f'(0) &= 1. \\ f''(0) &= 1. \\ f'''(0) &= 1. \end{aligned} \right.$$

La série de Mac-Laurin, appliquée à la fonction $f(x) = e^x$, donne donc :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Par définition, on a : $a = e^{\log a}$, d'où $a^x = e^{x \log a}$; si donc, dans le développement de e^x , on remplace x par $x \log a$, il vient :

$$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 \log^3 a}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

Développements de $e^{\sqrt{-1}x}$ et $e^{-\sqrt{-1}x}$.

En remplaçant dans le développement de e^x , x par $x\sqrt{-1}$ et x par $-x\sqrt{-1}$, on trouve :

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x\sqrt{-1}}{1} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots$$

De ces deux équations, on déduit aisément par addition et par soustraction, les formules trouvées plus haut.

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

ÉTUDE DES SÉRIES.

Par série, on entend une suite de termes qui se succèdent suivant une loi déterminée.

Lorsque les termes d'une série sont en nombre limité, leur somme arithmétique est dite la somme de cette série.

Lorsque les termes d'une série sont en nombre illimité, si la somme s_n des n premiers termes tend vers une limite déterminée, à mesure que n augmente, cette limite déterminée est dite la somme de la série. — Et, dans ce cas, la série est dite *convergente*.

Si la somme des n premiers termes d'une série, à mesure que n augmente indéfiniment, croît au delà de toute limite, il n'y a pas lieu à chercher cette somme et la série est appelée *divergente*.

Ainsi, la progression géométrique décroissante et d'un nombre illimité de termes :

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots$$

est une série convergente, car la somme de ses termes s'approche de plus en plus de la limite finie $\frac{a}{1-q}$, alors que l'on prend plus de termes.

À contraire, la progression géométrique croissante et d'un nombre illimité de termes, est une série divergente.

Si les termes d'une série sont respectivement moindres, à partir d'un certain terme, que les termes d'une progression géométrique décroissante, la série est évidemment convergente.

Si les termes d'une série sont respectivement plus grands, à partir d'un certain terme, que les termes d'une progression géométrique croissante, la série est divergente.

Soit une série :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Appelons s la somme de cette série et s_n la somme de ses n premiers termes, nous aurons :

$$s = s_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Donc, pour que la série soit convergente, il faut que, pour des valeurs de n de plus en plus grandes, s_n soit finie et que la somme $u_n + u_{n+1} + \dots$ tende vers zéro.

Une série ne peut être employée dans le calcul qu'autant qu'elle est convergente; il est donc important de savoir reconnaître à quel caractère une série est convergente, et lorsqu'on s'arrête à un certain terme de la série, de savoir quelle est l'erreur commise en prenant pour somme, la somme des termes compris depuis le premier jusqu'au terme où l'on s'arrête.

THÉORÈME I. — *Lorsque les termes d'une série sont alternativement positifs et négatifs, et qu'ils décroissent indéfiniment, la série est convergente et le premier des termes négligés représente l'approximation.*

Soit la série :

$$t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + \dots + t_n - t_{n+1} + t_{n+2} - t_{n+3} \dots$$

telle que

$$t_0 > t_1 > t_2 > t_3 > \dots$$

Je dis qu'elle est convergente.

En effet, si l'on s'arrête au terme positif t_n , on a la somme :

$$t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + \dots + t_n = s_n$$

laquelle est plus grande que la somme totale des termes de la série ; car, si l'on appelle Σ cette somme totale, on a :

$$\Sigma = s_n - t_{n+1} + t_{n+2} - t_{n+3} + t_{n+4} - \dots$$

ou ce qui est la même chose :

$$\Sigma = s_n - (t_{n+1} - t_{n+2}) - (t_{n+2} - t_{n+3}) - \dots$$

Les différences entre parenthèses sont toutes positives, puisque

$$t_{n+1} > t_{n+2} > t_{n+3} > t_{n+4} > \dots$$

donc la somme s_n est plus grande que Σ . Je dis que si l'on arrête à un terme négatif $-t_{n+1}$, la somme

$$s_{n+1} = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + \dots + t_n - t_{n+1}$$

bornée à ce terme est moindre que la somme totale Σ , des termes de la

série; car on a :

$$\Sigma = s_{n+1} + t_{n+2} - t_{n+3} + t_{n+4} - t_{n+5} + \dots$$

ou en groupant les termes par différences :

$$\Sigma = s_{n+1} + (t_{n+2} - t_{n+3}) + (t_{n+4} - t_{n+5}) + \dots$$

Chacune des différences est positive, donc s_{n+1} est moindre que Σ .

On a donc :

$$s_{n+1} < \Sigma < s_n.$$

Par suite, si l'on prend s_n pour la somme de la série, l'erreur commise est $< s_n - s_{n+1} = t_{n+1}$.

Donc, puisque t_{n+1} est de plus en plus petit à mesure que n augmente, il en résulte que la série est convergente. —

Remarque. — Lorsque les termes d'une série sont tous positifs, il ne suffit pas qu'ils décroissent indéfiniment pour que la série soit convergente.

Soit, par exemple, la série :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$$

Les termes de cette série sont indéfiniment décroissants, néanmoins cette série est divergente.

En effet, je partage les termes de cette série en groupes successifs terminés chacun à un terme dont le dénominateur soit une puissance de 2, et j'obtiens pour chaque groupe :

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\text{ou } 8 \frac{1}{16} \text{ ou } \frac{1}{2}.$$

Et ainsi de suite, la somme des termes de la série est donc plus grande que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

Cette somme contiendra autant de fois $\frac{1}{2}$ qu'on peut l'imaginer, elle est donc plus grande que toute quantité donnée.

Il en serait de même de la série :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

Et en général

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots$$

m étant moindre que 1; car les termes de cette série étant plus grands que ceux de la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

la somme de cette série est aussi plus grande.

Au contraire, la série :

$$1 + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \dots$$

est convergente lorsque m est plus grand que 1.

En effet, partageons les termes de cette série en groupes dont chacun commence par un terme ayant au dénominateur une puissance de 2, nous aurons :

$$\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} \text{ ou } 2 \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

$$\frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} < \frac{1}{4^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{4^m} \text{ ou } 4 \frac{1}{4^m} = \frac{1}{4^{m-1}}$$

$$\frac{1}{8^m} + \frac{1}{9^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{11^m} + \frac{1}{12^m} + \frac{1}{13^m} + \frac{1}{14^m} + \frac{1}{15^m} < 8 \frac{1}{8^m} = \frac{1}{8^{m-1}}$$

La somme des termes de la série proposée est donc plus petite que la suite :

$$\frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{4^{m-1}} + \frac{1}{8^{m-1}} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^{m-1}} + \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{m-1}}\right)^3 + \dots$$

Cette dernière suite est une progression géométrique décroissante, puisque sa raison $\frac{1}{2^{m-1}}$ est < 1 attendu que $m > 1$.

Donc la série proposée, étant moindre qu'une série convergente, est elle-même convergente.

THÉOREME II. — Lorsque, dans une série, à partir d'un certain terme, le rapport d'un terme au précédent a une limite déterminée inférieure à l'unité, cette série est convergente; elle est divergente si cette limite est plus grande que l'unité.

Soit la série :

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots$$

Supposons qu'à partir du terme t_{n+1} , le rapport $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ soit moindre que le nombre déterminé r , lequel est moindre que 1; admettons que cela ait lieu aussi pour tous les termes suivants, alors on aura :

$\begin{aligned} t_{n+1} &< r t_n \\ t_{n+2} &< r t_{n+1} \\ t_{n+3} &< r t_{n+2} \end{aligned}$	Et par suite	$\begin{aligned} t_{n+1} &< r t_n \\ t_{n+2} &< r^2 t_n \\ t_{n+3} &< r^3 t_n \end{aligned}$
--	---------------------	--

On a donc :

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} + t_{n+2} + \dots < t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_n (1 + r + r^2 + \dots).$$

L'expression $t_n (1 + r + r^2 + \dots) = \frac{t_n}{1-r}$ est finie, donc la série proposée est convergente.

Erreur commise en s'arrêtant au terme t_n . — La somme Σ des termes de la série est moindre que :

$$t_0 + t_1 + t^2 + \dots + t_n + r t_n (1 + r + r^2 + r^3 + \dots).$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme t_n est donc moindre que :

$$r t_n (1 + r + r^2 + r^3 + \dots) \text{ ou } : \frac{r t_n}{1-r}.$$

Remarque. — Si $r = 1$, il y a doute, la série peut être convergente ou divergente.

En effet, dans la série divergente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

le rapport d'un terme au précédent tend vers l'unité à mesure que n augmente.

THÉORÈME III. — On peut toujours prendre n assez grand quel que soit x , de telle sorte que l'expression $\frac{x^n}{1.2.3.\dots n}$ devienne moindre que toute quantité donnée.

En effet, soit un nombre p plus grand que x ; on a :

$$n = p - 1 + n - p + 1;$$

en sorte que l'on peut écrire :

$$\frac{x^n}{1.2.3.\dots n} = \frac{x^{p-1}}{1.2.3.(p-1)} \cdot \frac{x}{p} \cdot \frac{x}{p+1} \cdot \dots \cdot \frac{x}{n}.$$

Et si dans les facteurs $\frac{x}{p+1}, \frac{x}{p+2}, \dots, \frac{x}{n}$ eh nombre $n - p$, on remplace $p+1, p+2, \dots, n$ par p , on aura :

$$\frac{x^n}{1.2.3.\dots n} < \frac{x^{p-1}}{1.2.3.\dots (p-1)} \cdot \left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1}.$$

Or, $\frac{x}{p}$ est < 1 , on pourra donc prendre n assez grand pour que l'expression $\left(\frac{x}{p}\right)^{n-p+1}$ devienne moindre que toute quantité donnée. Il en sera donc de même de $\frac{x^n}{1.2.3.\dots n}$ puisque $\frac{x^{p-1}}{1.2.3.\dots (p-1)}$ est une constante.

THÉORÈME IV. — Si la série à termes positifs

$$t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n + \dots$$

est convergente et si $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ sont des nombres constants assujettis à ne pas dépasser un maximum A , la série :

$$A_0.t_0 + A_1.t_1 + A_2.t_2 + A_3.t_3 + \dots + A_n.t_n + \dots$$

est convergente.

Puisque la série est convergente à partir d'un certain terme t_n , la somme :

$$t_{n+1} + t_{n+2} + t_{n+3} + \dots$$

est moindre que toute quantité donnée.

Donc $A(t_{n+1} + t_{n+2} + \dots)$ est aussi moindre que toute quantité donnée.

Or :

$$A_{n+1} t_{n+1} + A_{n+2} t_{n+2} + A_{n+3} t_{n+3} + \dots < A(t_{n+1} + t_{n+2} + \dots)$$

Donc la somme

$$A_{n+1} t_{n+1} + A_{n+2} t_{n+2} + \dots$$

est elle-même moindre que toute quantité donnée et puisque $t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n$ est une quantité finie, la somme

$$A_0 t_0 + A_1 t_1 + A_2 t_2 + \dots$$

est aussi finie, c'est-à-dire que la série :

$$A_0 t_1 + A_1 t_2 + A_2 t_3 + \dots$$

est convergente.

Applications des théorèmes I, II, III et IV aux séries vues précédemment.

La série :

$$\text{Log}(x+h) = \text{Log } x + \text{Log } e \left(\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \dots \right)$$

est convergente pour $h < x$ (théorème 1).

Les séries :

$$\text{Log}(1+h) = \text{Log } e \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \dots \right).$$

$$\text{Log}(1-h) = -\text{Log } e \left(h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + \dots \right).$$

sont convergentes pour $h < 1$ (théorème 1).

La série :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

est convergente, puisque ses termes sont alternativement positifs et nég-

gatifs et vont en décroissant à partir d'un certain terme (théorème III) et si l'on s'arrête au premier terme, l'erreur commise est moindre que le suivant $\frac{x^3}{1.2.3}$ (théorème I). Donc, l'erreur commise en remplaçant le sinus d'un arc par cet arc, est moindre que le sixième du cube de l'arc.

La série

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

est convergente (théorème III).

La série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

est convergente, car à partir du rang n , le rapport d'un terme au précédent est $\frac{x}{n}$; on pourra donc (théorème II) prendre n assez grand pour que ce rapport devienne < 1 .

La série

$$a^x = 1 + \frac{x \cdot \log a}{1} + \frac{x^2 \log^2 a}{1.2} + \dots$$

est convergente, car dans cette série le rapport du terme de rang n au précédent, a pour valeur $\frac{x \cdot \log a}{n}$; x et $\log a$ étant déterminés, on pourra prendre n assez grand pour que ce rapport soit < 1 , et cela aura lieu a fortiori pour les termes suivants.

THÉORÈME. — Si dans le développement de $f(x+h)$, on fait $x=a$, et si pour cette valeur, toutes les dérivées successives ont des valeurs finies, on pourra toujours donner à h une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque du développement soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent.

On a :

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots$$

Et pour $x=a$

$$f(a+h) = f(a) + h \cdot f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

Je dis que : $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$,..... étant finies, on pourra toujours

prendre h assez petit, de telle sorte que l'on ait :

$$h f'(a) > \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots$$

ou :

$$f'(a) > \frac{h}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \dots \quad (1)$$

Soit M la plus grande valeur absolue des dérivées successives; l'inégalité (1) sera satisfaite si l'on a :

$$f'(a) > \frac{h}{1 \cdot 2} M + \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} M + \dots$$

et encore, en remplaçant les dénominateurs par des dénominateurs moindres

$$f'(a) > M \left(\frac{h}{2} + \frac{h^2}{2^2} + \frac{h^3}{2^3} + \dots \right).$$

Or,

$$\frac{h}{2} + \frac{h^2}{2^2} + \frac{h^3}{2^3} + \dots = \frac{\frac{h}{2}}{1 - \frac{h}{2}} = \frac{h}{2-h}.$$

On devra donc prendre pour h une valeur telle que l'on ait :

$$f'(a) > \frac{M \cdot h}{2-h}.$$

D'où :

$$\frac{h}{2-h} < \frac{f'(a)}{M}.$$

Cette inégalité pourra toujours être satisfaite. Le principe est donc démontré.

DES EXPRESSIONS FRACTIONNAIRES QUI POUR CERTAINES HYPOTHÈSES

DEVIENNENT $\frac{0}{0}$.

Supposons que pour une valeur a de x , l'expression

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

devienne $\frac{0}{0}$, c'est-à-dire supposons que l'on ait :

$$f(a) = 0 \text{ et } F(a) = 0.$$

Proposons-nous de déterminer la véritable valeur de l'expression

$$\frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Chercher la limite de l'expression $\frac{f(a)}{F(a)}$ revient évidemment à calculer la limite de l'expression

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}$$

pour $h = 0$.

On a donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)}{F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} \quad \text{pour } h = 0.$$

Et puisque $f(a)$ et $F(a)$ sont nuls, je puis les retrancher respectivement du numérateur et du dénominateur, en sorte que j'ai :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)}{F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{F(a+h) - F(a)},$$

ou ce qui revient au même en divisant haut et bas par h :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)}{F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}}{\frac{F(a+h) - F(a)}{h}}.$$

A la limite $h = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= f'(a) \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} &= F'(a). \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

c'est-à-dire que :

Si une expression fractionnaire devient $\frac{0}{0}$ pour une valeur particulière attribuée à la variable, la véritable valeur de l'expression s'obtient : en remplaçant les fonctions qui s'annulent par leurs dérivées, dans lesquelles on donne à la variable la valeur particulière considérée.

Remarque. — Si $\frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{0}{0}$, on aura de même

$$\lim \frac{f(a)}{F(a)} = \lim \frac{f'(a)}{F'(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Et ainsi de suite.

Exemples.

I. Trouver la véritable valeur de l'expression :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} \quad \text{pour } x = 0.$$

Pour $x = 0$, $\sin x = 0$, $\cos x = 1$, et l'on a :

$$\frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{0}{1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

Ici $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$.
 $F(x) = 1 - \cos x$, $F'(x) = \sin x$, $F'(0) = 0$.

Donc $\lim \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{f'(0)}{F'(0)} = \frac{1}{0} = \infty$.

II. Déterminer la véritable valeur de l'expression

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\sqrt[3]{2x+6} - \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{5x-1} - \sqrt[5]{20x+12}}{x^2+1 + \sqrt{3x+1} - \sqrt[3]{63x+1}} \quad \text{pour } x = 1.$$

Ici :

$$f(1) = \sqrt[3]{8} - \sqrt{2} + \sqrt[4]{4} - \sqrt[5]{32} = 2 - \sqrt{2} + \sqrt[4]{4} - 2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$$

$$F(1) = 2 + \sqrt{4} - \sqrt[3]{64} = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Donc $\frac{f(1)}{F(1)} = \frac{0}{0}$.

Les dérivées $f'(x)$ et $F'(x)$ sont :

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt{(2x+6)^2}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{5}{4\sqrt{(5x-1)^3}} - \frac{20}{5\sqrt{(20x+12)^4}}$$

$$F'(x) = 2x + \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} - \frac{63}{3\sqrt{(63x+1)^3}}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{2}{3\sqrt{64}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{64}} - \frac{20}{5\sqrt{32^3}} = \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{8}} - \frac{4}{\sqrt{32^3}} = \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{5}{8\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{32^3}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{32^3}} = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{4}{2^4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{12}. \\ F'(1) &= 2 + \frac{3}{2\sqrt{4}} - \frac{63}{3\sqrt{64^3}} = 2 + \frac{3}{4} - \frac{21}{4^3} = \frac{23}{16}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{\frac{1}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{12}}{\frac{23}{16}} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{69}.$$

III. Déterminer la véritable valeur de l'expression :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2}{x^4 - x^3 - 13x^2 + 25x - 12} \quad \text{pour } x = 1.$$

$$f(1) = 1 + 1 - 3 - 1 + 2 = 0.$$

$$F(1) = 1 - 1 - 13 + 25 - 12 = 0.$$

$$\frac{f'(1)}{F'(1)} = 0.$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1.$$

$$F'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 26x + 25.$$

$$f'(1) = 4 + 3 - 6 - 1 = 0.$$

$$F'(1) = 4 - 3 - 26 + 25 = 0.$$

$$\frac{f''(1)}{F''(1)} = \frac{0}{0}.$$

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 6.$$

$$F''(x) = 12x^2 - 6x - 26.$$

$$f''(1) = 12 + 6 - 6 = 12.$$

$$F''(1) = 12 - 6 - 26 = -20.$$

Donc ici :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{F'(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{F''(x)} = \frac{f''(1)}{F''(1)} = -\frac{12}{20} = -\frac{3}{5}.$$

IV. Déterminer la véritable valeur de l'expression

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{e^x - \cos x}{\lg x + x^2} \quad \text{pour } x = 0.$$

$$f(0) = e^0 - \cos 0 = 1 - 1 = 0.$$

$$F(0) = \lg 0 + 0 = 0.$$

$$f'(x) = e^x + \sin x \quad f'(0) = 1.$$

$$F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 2x \quad F'(0) = 1.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{F(x)} = 1.$$

V. Déterminer la véritable valeur de

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x-1}{\sqrt[m]{x}-1} \quad \text{pour } x = 1.$$

$$f(1) = 1 - 1 = 0 \quad f'(x) = 1$$

$$F(1) = 1 - 1 = 0 \quad F'(x) = \frac{1}{m \sqrt[m]{x^{m-1}}}$$

$$f'(1) = 1$$

$$F'(1) = \frac{1}{m} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{F'(x)} = m.$$

VI. Déterminer la véritable valeur de

$$\frac{f(m)}{F(m)} = \frac{(1+x)^m - 1}{m} \quad \text{pour } m = 0.$$

$$f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$F(0) = 0.$$

Puisqu'ici m est variable, le principe $\frac{da^x}{dx} = a^x \log a$ donne :

$$f'(m) = (1+x)^m \log(1+x).$$

Par suite :

$$f'(0) = \log(1+x) \quad \text{or} \quad F'(m) = 1.$$

Donc :

$$\lim_{F(0)} \frac{f(0)}{F(0)} = \log(1+x).$$

VII. Déterminer la véritable valeur de

$$\frac{f(h)}{F(h)} = \frac{\sin(x+3h) - 3\sin(x+2h) + 3\sin(x+h) - \sin x}{h^3} \text{ pour } h=0$$

$$f(0) = \sin x - 3\sin x + 3\sin x - \sin x = 0.$$

$$F(0) = 0.$$

$$f'(h) = 3\cos(x+3h) - 6\cos(x+2h) + 3\cos(x+h).$$

$$F'(h) = 3h^2.$$

$$\frac{f'(h)}{F'(h)} = \frac{\cos(x+3h) - 2\cos(x+2h) + \cos(x+h)}{h^2} \quad \frac{f'(0)}{F'(0)} = \frac{0}{0}.$$

$$f''(h) = 3[-3\sin(x+3h) + 4\sin(x+2h) - \sin(x+h)].$$

$$F''(h) = 3 \cdot 2h.$$

$$\frac{f''(h)}{F''(h)} = \frac{-3\sin(x+3h) + 4\sin(x+2h) - \sin(x+h)}{2h} \quad \frac{f''(0)}{F''(0)} = \frac{0}{0}.$$

$$f'''(h) = 3[-9\cos(x+3h) + 8\cos(x+2h) - \cos(x+h)].$$

$$F'''(h) = 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

$$\frac{f'''(h)}{F'''(h)} = \frac{-9\cos(x+3h) + 8\cos(x+2h) - \cos(x+h)}{2} \quad \frac{f'''(0)}{F'''(0)} = -\cos x.$$

Donc :

$$\lim_{F(0)} \frac{f(0)}{F(0)} = \lim_{F'(0)} \frac{f'(0)}{F'(0)} = \lim_{F''(0)} \frac{f''(0)}{F''(0)} = \lim_{F'''(0)} \frac{f'''(0)}{F'''(0)} = -\cos x.$$

DES EXPRESSIONS QUI DEVIENNENT $\frac{\infty}{\infty}$ POUR UNE CERTAINE HYPOTHÈSE DE
LA VARIABLE.

Supposons que pour $x = a$, l'expression $\frac{f(x)}{F(x)}$ devienne $\frac{\infty}{\infty}$, c'est-à-

dire que l'on ait :

$$f(a) = \infty \quad F(a) = \infty.$$

Je dis que la limite $\frac{f(a)}{F(a)}$ est encore $\frac{f'(a)}{F'(a)}$, comme pour les expressions qui deviennent $\frac{0}{0}$.

En effet l'expression $\frac{f(x)}{F(x)}$ peut s'écrire ainsi :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}}{\frac{1}{\frac{1}{F(x)}}}$$

Et pour $x = a$, puisque $F(a) = \infty$, $f(a) = \infty$, on a :

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}.$$

Si donc à l'expression $\frac{\frac{1}{\frac{1}{f(a)}}}{\frac{1}{\frac{1}{F(a)}}}$ on applique la règle donnée précédemment (page 134), on aura, d'après le principe de la dérivée d'un quotient :

$$\lim \frac{f(a)}{F(a)} = \lim \frac{\frac{F'(a)}{\left[\frac{1}{F(a)}\right]^2}}{\frac{f'(a)}{\left[\frac{1}{f(a)}\right]^2}}.$$

Cette équation donne successivement :

$$\lim \frac{f(a)}{F(a)} = \lim \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \lim \left[\frac{f(a)}{F(a)} \right]^2$$

$$1 = \lim \frac{F'(a)}{f'(a)} \cdot \lim \frac{f(a)}{F(a)};$$

d'où enfin :

$$\lim \frac{f(a)}{F(a)} = \lim \frac{f'(a)}{F'(a)}.$$

Donc : si une expression fractionnaire devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour une certaine valeur de la variable, il faut, pour avoir sa véritable valeur : remplacer chacune des fonctions par sa dérivée et introduire dans le quotient de ces dérivées la valeur particulière de la variable.

CONDITIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM D'UNE FONCTION D'UNE SEULE VARIABLE.

On dit qu'une fonction $f(x)$ est *maximum*, pour une certaine valeur a de x ; lorsque la valeur de cette fonction est *plus grande* que les valeurs $f(a-h)$ et $f(a+h)$ correspondantes aux valeurs $a-h$ et $a+h$ infiniment voisines de a .

Ainsi, pour $x=a$ la fonction $f(x)$ devient maximum si l'on a :

$$\left. \begin{aligned} f(a) &> f(a-h) \\ f(a) &> f(a+h) \end{aligned} \right\} h \text{ étant infiniment petit.}$$

Une fonction $f(x)$ est dite *minimum*, pour une certaine valeur a de x ; lorsque la valeur $f(a)$ de cette fonction est *plus petite* que les valeurs $f(a-h)$ et $f(a+h)$ correspondantes aux valeurs $a-h$ et $a+h$ infiniment voisines de a .

Ainsi, pour $x=a$, la fonction $f(x)$ devient minimum si l'on a :

$$\left. \begin{aligned} f(a) &< f(a-h) \\ f(a) &< f(a+h) \end{aligned} \right\} h \text{ étant infiniment petit.}$$

La série de Taylor donne :

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

$$f(a-h) - f(a) = -h f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) - \frac{h^3}{1.2.3} f'''(a) + \dots$$

Donc si pour $x=a$, $f(a)$ est un maximum ou un minimum, les seconds membres de ces équations devront être tous deux négatifs ou tous deux positifs, h étant infiniment petit.

Cette condition ne pourra être satisfaite qu'autant que le premier terme sera nul, car h étant infiniment petit, le signe du second membre est celui du premier terme.

Donc si a rend maximum ou minimum la fonction $f(x)$, on doit avoir :

$$f'(a) = 0.$$

C'est-à-dire que : toute valeur de x qui rendra maximum ou minimum une fonction d' x , est racine de l'équation $f'(x) = 0$, laquelle s'obtient en égalant à zéro, la dérivée de la fonction proposée.

Pour une valeur a de x qui rend une fonction maximum ou minimum,

les équations précédentes deviennent :

$$f(a+h) - f(a) = \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \dots$$

$$f(a-h) - f(a) = -\frac{h^2}{1.2} f''(a) - \dots$$

Et puisque h est infiniment petit, le signe du second membre est celui de son premier terme.

Donc :

$$f(a) \text{ est maximum si } f''(a) \text{ est } < 0.$$

$$f(a) \text{ est minimum si } f''(a) \text{ est } > 0.$$

Les conditions de maximum sont donc :

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0.$$

Et les conditions de minimum sont :

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0.$$

Si l'on avait $f''(a) = 0$, pour qu'il y ait maximum il faudrait que l'on eût :

$$f'''(a) = 0, \quad f^{(4)}(a) < 0.$$

Et pour qu'il y eût minimum, on devrait avoir :

$$f'''(a) = 0, \quad f^{(4)}(a) > 0.$$

Remarque. — Puisque pour une valeur d' x , qui rend maximum ou minimum une fonction d' x , on a $f'(x) = 0$, il en résulte que pour une ordonnée maximum ou minimum de la courbe $y = f(x)$ la tangente est parallèle à l'axe des x .

Applications.

1. Déterminer le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = \sin x \cos x.$$

Ici :

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

$$f''(x) = -2 \sin 2x.$$

Les valeurs qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont données par l'équation :

$$\cos 2x = 0.$$

D'où :

$$2x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}.$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Portant cette valeur de x dans $f''(x)$, il vient :

$$f''(x) = -2 \sin \left(2n\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2 < 0.$$

Donc $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ rend $f(x)$ maximum.

II. Déterminer le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = x^3 - x^4.$$

Ici :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x^3.$$

$$f''(x) = 6x - 12x^2.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont tirées de l'équation :

$$3x^2 - 4x^3 = 0.$$

D'où :

$$x = 0, \quad x = \frac{3}{4}.$$

La substitution de ces valeurs dans $f''(x)$ donne :

$$f''(0) = 0 > 0. \text{ Donc } x = 0 \text{ rend } f(x) \text{ minimum.}$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) = 6 - 12 \cdot \frac{9}{16} = 0, \text{ et puisque } f'''(x) = 6 - 24x \text{ ne peut être annulée,}$$

il en résulte que la racine $x = \frac{3}{4}$ tirée de $f'(x) = 0$, ne rend $f(x)$ ni maximum ni minimum.

III. Déterminer le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2.$$

Ici :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 6x,$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x + 6.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, sont racines de l'équation $f'(x) = 0$ ou :

$$\begin{aligned} 4x^3 - 12x^2 + 6x &= 0, \\ 2x(2x^2 - 6x + 3) &= 0. \end{aligned}$$

D'où :

$$x = 0, \quad 2x^2 - 6x + 3 = 0 \dots x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

La substitution de ces trois valeurs de x dans

$$f''(x) = 6(2x^2 - 4x + 1)$$

donne successivement :

$$f''(0) = 6 > 0, \text{ donc } x = 0 \text{ rend } f(x) \text{ minimum,}$$

$$f''\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right) = 6(1+\sqrt{3}) > 0, \text{ donc } x = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \text{ rend } f(x) \text{ minimum,}$$

$$f''\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right) = 6(1-\sqrt{3}) < 0, \text{ donc } x = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{ rend } f(x) \text{ maximum.}$$

IV. Déterminer la valeur de x , qui rend maximum ou minimum la fonction

$$f(x) = \frac{\log x}{x}$$

Ici :

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2},$$

$$f''(x) = \frac{2 \log x - 3}{x^3}.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont racines de l'équation $f'(x) = 0$ ou :

$$\frac{1 - \log x}{x^2} = 0.$$

D'où :

$$1 - \log x = 0 \dots x = e.$$

La substitution de $x = e$ dans $f''(x)$ donne :

$$f''(e) = \frac{2-3}{e^3} < 0.$$

Donc : $x = e$, rend $f(x)$ maximum.

V. Déterminer le maximum ou minimum de la fonction

$$f(x) = \sin^2 x \cos x.$$

Ici :

$$f''(x) = 3 \sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x,$$

$$f''(x) = (3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x) \sin 2x.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum, sont racines de l'équation $f'(x) = 0$ ou :

$$\sin^2 x (3 \cos^2 x - \sin^2 x) = 0.$$

D'où les équations :

$$\sin^2 x = 0, \quad 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0.$$

Et, par suite :

$$x = 2K\pi, \quad \text{Tg } x = \sqrt{3}, \dots, x = \frac{\pi}{3}.$$

La substitution de $x = \frac{\pi}{3}$ dans $f''(x)$ donne :

$$f''(x) = \left(3 \frac{1}{4} - 5 \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0.$$

Donc : $x = \frac{\pi}{3}$ rend $f(x)$ maximum.

Pour $x = 0$, $f'(0) = 0$; il faut ici prendre $f'''(x)$ et voir si $f''(x)$ est nulle et déterminer le signe de $f''(0)$.

VI. Déterminer le maximum ou le minimum de la fonction

$$f(x) = x^x.$$

ici :

$$f'(x) = x^x (\log x + 1),$$

$$f''(x) = x^x (\log x + 1)^2 + x^{x-1}.$$

Les valeurs de x qui rendent $f(x)$ maximum ou minimum sont racines de l'équation :

$$x^x (\log x + 1) = 0.$$

D'où : $\log x + 1 = 0$. D'où $x = \frac{1}{e}$.

La substitution de $\frac{1}{e}$ à la place de x dans $f''(x)$ donne :

$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}-1\right)} > 0.$$

Donc : la valeur $x = \frac{1}{e}$ rend $f(x)$ minimum.

VII. Déterminer la valeur de x , qui rend maximum ou minimum la fonction

$$f(x) = \sin x \sin(a - x).$$

Ici :

$$f'(x) = \sin(a - x) \cos x - \sin x \cos(a - x) = \sin(a - 2x),$$

$$f''(x) = -2 \cos(a - 2x).$$

La valeur de x qui rend $f(x)$ maximum ou minimum est racine de l'équation :

$$f'(x) = 0 \text{ ou :}$$

$$\sin(a - 2x) = 0, \quad \text{d'où } x = \frac{a}{2}.$$

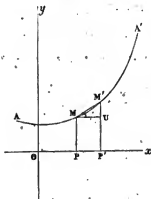
La substitution de $\frac{a}{2}$ à la place de x dans $f''(x)$ donne :

$$f''\left(\frac{a}{2}\right) = -2 < 0.$$

Donc : $x = \frac{a}{2}$ rend $f(x)$ maximum.

DIFFÉRENTIELLE DE L'ARC D'UNE COURBE PLANE.

I. Coordonnées rectilignes.—Soit AA' une courbe rapportée à des axes rectangulaires.



Soit M un point dont les coordonnées sont x et y , si l'on donne à la variable x un accroissement $PP' = \Delta x$, on obtient un nouveau point M' de la courbe correspondant à l'abscisse $x + \Delta x$, et le triangle rectangle $MM'U$ nous donne :

$$MM' = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

À la limite, lorsque le point M' se rapproche indéfiniment du point M , la corde MM' se confond évidemment avec la courbe et l'on dit à cette limite que MM' est la différentielle de l'arc AM ; pour

cette limite Δx et Δy deviennent dx et dy ; en sorte que si l'on appelle s l'arc AM , l'équation (1) devient à la limite :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Telle est l'expression de la différentielle de l'arc d'une courbe plane.

Remarque. — α étant l'angle que fait MM' avec l'axe des x , le triangle rectangle $MM'U$ donne :

$$\sin \alpha = \frac{\Delta y}{MM'}, \quad \cos \alpha = \frac{\Delta x}{MM'}.$$

Et la limite :

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Dans ces dernières formules, α est l'angle que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x .

II. *Coordonnées polaires.* — Si l'on prend, l'origine des coordonnées rectilignes rectangles pour pôle et l'axe des x pour axe polaire ; on a pour un point M de la courbe :

$$x = r \cos \theta.$$

$$y = r \sin \theta.$$

La différentiation de ces équations donne en y remarquant que θ est la variable indépendante :

$$dx = -\sin \theta \cdot dr - r \cos \theta \cdot d\theta.$$

$$dy = \cos \theta \cdot dr + r \sin \theta \cdot d\theta.$$

D'où l'on tire :

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

La substitution de cette somme dans la formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

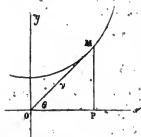
donne :

$$ds = \sqrt{r^2 d\theta^2 + dr^2}.$$

Ou bien encore :

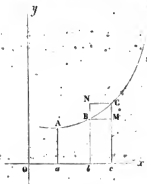
$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}.$$

Telle est, en coordonnées polaires, l'expression de la différentielle de l'arc d'une courbe.



DIFFÉRENTIELLE DE L'AIRE D'UNE COURBE PLANE.

I. *Axes rectangulaires.* — Soit une courbe AB, rapportée à des axes rectangulaires et dont l'équation est $y = f(x)$.



Si l'on considère l'arc AB de cette courbe, l'aire de cette courbe est la portion de surface AaBb comprise entre les ordonnées extrêmes Aa, Bb, l'axe des x et l'arc AB.

Appelons A l'aire AaBb; alors pour un accroissement bc de l'abscisse Ob, l'aire A prend l'accroissement BbCc, et l'on a :

$$\Delta A = BbCc.$$

Or sur la figure :

$$\text{rectangle } BbMc < \Delta A < \text{rectangle } bcNC.$$

Ou bien, en appelant x et y les coordonnées du point extrême B,

$$y \, \Delta x < \Delta A < (y + \Delta y) \, \Delta x.$$

D'où :

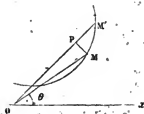
$$y < \frac{\Delta A}{\Delta x} < y + \Delta y.$$

Par suite, si l'on passe à la limite de Δx , ΔA devient dA , et les ordonnées y et $y + \Delta y$ deviennent égales; en sorte que l'on a :

$$\frac{dA}{dx} = y. \quad \text{D'où} \quad dA = y \, dx.$$

Telle est l'expression de la différentielle de l'aire d'une courbe plane.

II. *Coordonnées polaires.* — L'aire d'une courbe polaire, est la surface comprise entre un arc de cette courbe et les rayons vecteurs des extrémités de cet arc.



Ceci posé, soit un point M dont les coordonnées polaires sont :

$$OM = r. \quad M\theta = \theta.$$

Si l'on donne à l'angle θ , l'accroissement $MOM' = \Delta \theta$, l'accroissement de l'aire est la surface MOM' , et l'on a :

$$dA = \text{Lim. surface MOP.} \quad (1)$$

MP étant l'arc de cercle, décrit de θ comme centre avec OM ou r pour rayon.

La surface MOP est celle d'un secteur circulaire, et l'on a :

$$\text{surf. MOP} = \frac{1}{2} r \cdot \text{arc MP.}$$

Or :

$$\text{arc MP} = r \cdot \Delta\theta.$$

Donc :

$$\text{surf. MOP} = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

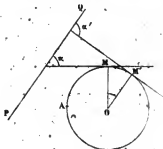
Et l'équation (1) devient alors :

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Telle est l'expression de la différentielle de l'aire d'une courbe, rapportée à des coordonnées polaires.

DE LA COURBURE ET DU RAYON DE COURBURE.

Soient un cercle de centre θ , et une droite PQ tracée dans son plan et que nous prendrions pour axe des x .



Supposons que sur la circonférence, on compte les arcs à partir d'un point fixe A ; considérons deux points voisins M, M' ; menons les tangentes au cercle en M et M', et appelons α et α' les angles que font ces tangentes avec l'axe PQ. Alors, en menant les rayons OM, OM', on a :

$$\text{angle MOM'} \text{ ou } \alpha' - \alpha \text{ ou } \Delta\alpha = \frac{1}{R} \text{ arc MM'}.$$

R étant le rayon du cercle.

Ou bien, si l'on appelle s l'arc AM,

$$\Delta\alpha = \frac{1}{R} \Delta s.$$

D'où :

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$$

Et à la limite

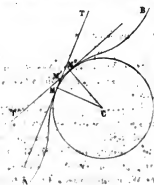
$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

Le rapport $\frac{d\alpha}{ds}$ qui est constant et égal à l'inverse du rayon, représente par définition la courbure de la circonférence. On voit donc que la courbure d'une même circonférence est constante pour tous ses points.

Remarque sur la ligne droite. — La ligne droite peut être considérée comme une circonférence de rayon infini; alors pour la ligne droite $\frac{d\alpha}{ds} = 0$, c'est-à-dire que la ligne droite n'a pas de courbure.

CERCLE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE COURBE QUELCONQUE.

Soit une courbe AB; et soient trois points M, M', M'' infiniment voisins pris sur cette courbe. Par ces trois points, on peut faire passer un cercle.



Si l'on suppose que les trois points M, M' et M'' se rapprochent indéfiniment du point M en restant toujours sur la courbe; la position limite, du cercle qui passe par ces trois points, est un cercle de centre C, lequel jouit évidemment des propriétés suivantes :

1° Attendu que les cordes MM' et M'M'', deviennent deux tangentes infiniment voisines de la courbe au point M. Ce cercle est tangent à la courbe au point M, son centre est donc sur la normale à la courbe menée en ce point, et de plus ce centre est le point de rencontre des deux normales infiniment voisines menées en M et dans le voisinage de ce point.

2° Les deux tangentes infiniment voisines MM' et M'M'' du cercle et de la courbe se confondent; donc pour le cercle et pour la courbe l'angle $d\alpha$ est le même.

3° L'arc ds du cercle de centre C, compté à partir de M, se confond avec l'arc ds de la courbe compté à partir du même point M.

La courbure de la courbe au point M est donc celle du cercle de centre C au point M ; or la courbure du cercle étant la même quel que soit le point considéré de ce cercle, et cette courbure ayant pour expression

$$\frac{d\alpha}{ds}$$

Il en résulte que la courbure de la courbe au point M a pour expression $\frac{d\alpha}{ds}$; ce rapport étant tiré de l'équation $y = f(x)$ de la courbe. Ce rapport déterminé, il faudra y remplacer x et y par les coordonnées du point M considéré.

Le rayon de courbure de la courbe au point M a donc pour expression

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

CALCUL DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE DONT L'ÉQUATION EST DONNÉE.

Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires ; puisque :

$$R = \frac{ds}{d\alpha}$$

Il s'agit de calculer ds et $d\alpha$ afin d'avoir R .

On a trouvé :

$$(1) \dots ds = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Cette formule a lieu, que x soit ou ne soit pas la variable indépendante.

Pour calculer $d\alpha$, supposons d'abord x variable indépendante.

On a :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

La différentiation de cette équation donne :

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dy}{dx}$$

Et puisque x est la variable indépendante :

$$d \frac{dy}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

On a donc :

$$\frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Ou bien :

$$d\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Par suite :

$$d\alpha = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Et à cause de (1)

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

D'où :

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

Telle est, x étant la variable indépendante, l'expression du rayon de courbure en un point x, y d'une courbe.

Les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$ sont tirées de l'équation $y = f(x)$ de la courbe; et dans ces dérivées on doit remplacer x et y par les coordonnées du point particulier, pour lequel on veut établir la courbure de la courbe. Si x n'est pas la variable indépendante, la différentiation de l'équation

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$$

donne :

$$d\alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \frac{d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy}{dx^3}$$

Ou bien et successivement :

$$d\alpha \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right] = \frac{d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy}{dx^3}$$

$$d\alpha \left(\frac{dy^2 + dx^2}{dx^3} \right) = \frac{d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy}{dx^3}$$

$$d\alpha = \frac{d^2 y \cdot dx - d^2 x \cdot dy}{dy^2 + dx^2}$$

Et à cause de (t), on a :

$$\frac{ds}{d\alpha} \text{ ou } R = \frac{(dy^2 + dx^2)^{\frac{3}{2}}}{d^2y \cdot dx - d^2x \cdot dy}$$

Telle est, α n'étant pas la variable indépendante, l'expression du rayon de courbure.

DU CENTRE DE COURBURE.

Le centre C du cercle de courbure est dit le centre de courbure de la courbe au point M; pour obtenir ce centre de courbure, il suffit de prendre sur la normale menée à la courbe en M et à partir de ce point, une longueur égale au rayon R que l'on vient de calculer.

Il ne peut y avoir de doute sur le sens de la direction de la normale, suivant lequel on doit porter le rayon R, pour avoir le centre; on remarquera que le centre d'un cercle est toujours dans l'intérieur du cercle, c'est-à-dire dans sa concavité; et puisqu'au point M de la courbe, l'élément ds de la courbe se confond avec l'élément ds du cercle, il en résulte que le centre de courbure en M devra se trouver dans la concavité de la courbe.

Remarque. — L'angle $d\alpha$ que forment deux tangentes infiniment voisines est dit l'angle de contingence.

EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE RAPPORTÉE A DES COORDONNÉES POLAIRES.

Les axes étant supposés rectangulaires, si l'on prend pour axe polaire, l'axe des x et pour pôle, l'origine :

On a :

$$x = r \cdot \cos \theta. \quad y = r \cdot \sin \theta.$$

En différenciant successivement ces équations, on trouve, en y considérant θ comme variable indépendante :

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta \cdot dr - r \cdot \sin \theta \cdot d\theta, \\ dy &= \sin \theta \cdot dr + r \cdot \cos \theta \cdot d\theta, \\ d^2x &= \cos \theta \cdot d^2r - 2 \sin \theta \cdot dr \cdot d\theta - r \cos \theta \cdot d\theta^2, \\ d^2y &= \sin \theta \cdot d^2r + 2 \cos \theta \cdot dr \cdot d\theta - r \sin \theta \cdot d\theta^2. \end{aligned}$$

Si l'on porte ces valeurs dans l'expression

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x}$$

du rayon de courbure, déterminée dans l'hypothèse où x n'est pas la variable indépendante, on trouve, toutes réductions faites :

$$R = \frac{(r + \frac{dr^2}{ds^2})^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2 \frac{dr^2}{ds^2} - r \frac{d^2r}{ds^2}}$$

Telle est l'expression du rayon de courbure d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires.

DE L'INTERPOLATION.

Définition. — Si dans une suite de quantités :

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1}$$

déterminées d'après une loi quelconque, on retranche chaque quantité de celle qui la suit, on forme une nouvelle suite :

$$u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots, u_{n+1} - u_n$$

dont les termes sont appelées les *différences premières* des termes de la suite primitive.

La différence $u_2 - u_1$ est dite la *différence de u_1* ; de même, les différences $u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots, u_{n+1} - u_n$ sont dites les différences de $u_2, u_3, \dots, u_n$.

Notation. — Pour représenter les différences premières, on se sert du signe Δ , que l'on fait suivre du second terme de la différence. Ainsi les différences :

$$u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots, u_{n+1} - u_n$$

sont représentées par les signes :

$$\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \dots, \Delta u_n.$$

Une suite quelconque de quantités étant donnée, leurs différences forment une nouvelle suite ayant un terme de moins que la première.

En opérant sur cette suite de différences comme sur celle qui lui a donné naissance, on forme ainsi les différences :

$$\Delta u_2 - \Delta u_1, \Delta u_3 - \Delta u_2, \dots, \Delta u_n - \Delta u_{n-1}$$

lesquelles sont dites les *différences secondes* des termes de la suite $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n+1}$.

Ces différences secondes sont désignées par le signe Δ^2 et l'on a :

$$\begin{aligned}\Delta u_2 - \Delta u_1 &= \Delta^2 u_1, \\ \Delta u_3 - \Delta u_2 &= \Delta^2 u_2, \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} &= \Delta^2 u_{n-1}.\end{aligned}$$

La suite :

$$\Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \Delta^2 u_3, \dots, \Delta^2 u_{n-1}$$

a évidemment un terme de moins que la suite :

$$\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3, \dots, \Delta u_n.$$

En opérant sur la suite des différences secondes, comme on l'a fait sur la suite proposée, on formera les différences des différences secondes que l'on nomme les *différences troisièmes*, et que l'on désigne par Δ^3 .

Ainsi :

$$\Delta^2 u_2 - \Delta^2 u_1 = \Delta^3 u_1; \quad \Delta^2 u_3 - \Delta^2 u_2 = \Delta^3 u_2; \dots$$

La suite :

$$\Delta^3 u_1, \Delta^3 u_2, \Delta^3 u_3, \dots, \Delta^3 u_{n-2}$$

a évidemment un terme de moins que la suite des différences secondes.

On peut continuer ainsi indéfiniment et former les différences *quatrièmes*, *cinquièmes*, etc., que l'on désigne par $\Delta^4, \Delta^5, \dots$, le nombre de ces différences n'étant limité que par celui des termes de la suite proposée.

Ainsi, une suite de $n + 1$ termes donne lieu : à n différences premières; à $n-1$ différences secondes; à $n-2$ différences troisièmes, ..., et à une seule différence $n^{\text{ième}}$.

Si une suite est *illimitée*, on peut considérer des différences d'un ordre illimité.

Remarque. — Si l'on a :

$$y = u + v + w + \dots$$

on en déduit :

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots$$

C'est-à-dire que :

La différence d'une somme de quantités est égale à la somme des différences de ces quantités.

PROBLÈME. — Connaissant le premier terme u_1 et les différences successives $\Delta u_1, \Delta^2 u_1, \Delta^3 u_1, \dots, \Delta^n u_1$ de ce terme, dans la suite,

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, u_{n+1},$$

calculer le dernier terme u_{n+1} de cette suite.

L'équation $u_2 - u_1 = \Delta u_1$ donne :

$$(a) \dots u_2 = u_1 + \Delta u_1.$$

De même, l'équation $u_3 - u_2 = \Delta u_2$ donne :

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2.$$

Et, si dans cette équation, on remplace u_2 par sa valeur (a), on aura :

$$u_3 = u_1 + \Delta u_1 + \Delta (u_1 + \Delta u_1)$$

ou bien, d'après la remarque faite ci-dessus :

$$u_3 = u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1.$$

Et, par suite :

$$(b) \dots u_3 = u_1 + 2 \Delta u_1 + \Delta^2 u_1.$$

Cette équation combinée de la même manière avec l'équation $u_4 - u_3 = \Delta u_3$, donne après toute réduction de calculs :

$$(c) \dots u_4 = u_1 + 3 \Delta u_1 + 3 \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1.$$

On trouvera de même :

$$(d) \dots u_5 = u_1 + 4 \Delta u_1 + 6 \Delta^2 u_1 + 4 \Delta^3 u_1 + \Delta^4 u_1.$$

$$(e) \dots u_6 = u_1 + 5 \Delta u_1 + 10 \Delta^2 u_1 + 10 \Delta^3 u_1 + 5 \Delta^4 u_1 + \Delta^5 u_1,$$

et ainsi de suite.

L'inspection des seconds membres des équations (a), (b), (c), (d), (e), montre que leurs coefficients sont ceux des termes des développements des puissances $(x + a)$, $(x + a)^2$, $(x + a)^3$, $(x + a)^4$ et $(x + a)^5$.

Les indices de Δ sont précisément les exposants de a dans les développements de ces mêmes puissances.

On a donc par analogie :

$$u_{n+1} = u_1 + n \Delta u_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_1 + \dots + n \Delta^{n-1} u_1 + \Delta^n u_1.$$

Telle est l'expression cherchée.

DE L'INTERPOLATION.

Insérer entre les termes d'une suite, assujettis à une certaine loi, de nouveaux termes assujettis à la même loi.

Tel est le problème de l'interpolation.

Ce problème est d'une grande facilité parfois, lorsque la loi des termes est connue. — C'est ainsi qu'entre deux termes d'une progression, on peut insérer un certain nombre de moyens.

Si l'on considère, au contraire, des nombres dont la loi soit inconnue, le problème de l'interpolation devient indéterminé, et pour le résoudre, il faut imposer aux termes inconnus une condition qui fasse disparaître l'indétermination.

Cette condition est le plus souvent que : les différences d'un certain ordre soient égales à zéro.

C'est ainsi que, dans le calcul numérique des logarithmes, on admet que les différences secondes sont nulles ; car, admettre que l'accroissement des logarithmes soit proportionnel à celui des nombres, c'est admettre que, pour des accroissements égaux des nombres, les accroissements des logarithmes sont aussi égaux ; en d'autres termes, c'est admettre que la différence première des logarithmes soit constante et que, par suite, la différence seconde soit nulle.

Alors que, dans la construction d'une table, on s'apercevra que les différences d'un certain ordre deviennent de plus en plus petites, sensiblement nulles, pour des accroissements égaux de la variable ; on admettra que ces différences sont nulles et *a fortiori*, qu'il en serait de même pour des accroissements plus petits.

Ce fait reconnu et le principe admis, le problème de l'interpolation peut s'énoncer ainsi :

PROBLÈME. — Connaissant les valeurs $u_0, u_1, \dots, u_n$, d'une fonction qui correspondent à des valeurs $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ de la variable, et admettant que, pour des accroissements égaux quelconques de x , les différences $(n+1)^{\text{ième}}$ de la fonction soient égales à zéro ; trouver la valeur de cette fonction qui correspond à une valeur donnée de x , comprise entre les limites x_0 et $x_0 + nh$.

Dans le calcul des différences, on a trouvé la formule :

$$(1) \dots u_n = u_0 + n \Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \dots$$

Et si, dans cette formule, on suppose que l'accroissement h de x soit représenté, par $\frac{x-x_0}{n}$, on aura $h = \frac{x-x_0}{n}$ et par suite :

$$nh = x - x_0, \text{ d'où } x = x_0 + nh.$$

En sorte que la valeur $x_0 + nh$ à laquelle se rapporte la valeur u_n de la fonction sera x . L'équation

$$nh = x - x_0 \text{ donne } n = \frac{x - x_0}{h}.$$

et la formule (1) devient :

$$u_x = u_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \\ + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 2 \right)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \dots$$

Telle est la formule qui servira au calcul d'interpolation.

Application numérique.

Supposons que l'on veuille obtenir le logarithme du nombre 3,1415926536 (π) par le moyen d'une table de logarithmes à dix décimales.

On regardera les logarithmes contenus dans cette table comme les valeurs données de la fonction u ; et l'on formera le tableau suivant :

	NUMÉRIQUE ou valeurs de x .	LOGARITHMES ou valeurs de la fonction u .	DIFFÉRENCES premières Δu_0 .	DIFFÉRENCES secondes $\Delta^2 u_0$.	DIFFÉRENCES troisièmes $\Delta^3 u_0$.	DIFFÉRENCES quatrièmes $\Delta^4 u_0$.
$x_0 \dots \dots$	3, 14	0,4969296481				
$x_0 + h \dots$	3, 15	0,4983105536	+0,0013809057			
$x_0 + 2h \dots$	3, 16	0,4996870620	+0,0013765288	-0,00004369		
$x_0 + 3h \dots$	3, 17	0,5010593122	+0,0013721758	-0,000043482	+0,000000277	
$x_0 + 4h \dots$	3, 18	0,5024271290	+0,0013678578	-0,000043318	+0,000000274	-0,000000003

La différence quatrième est extrêmement petite, on peut donc considérer la différence cinquième comme nulle.

Ici : $x = 3,1415926536$, $x_0 = 3,14$,
 $x - x_0 = 0,0015926536$.

$h = 0,01$. D'où $\frac{x - x_0}{h} = 0,15926536$.

$$u_0 = 0,4969296481 \\ \Delta u_0 = +0,0013809057 \\ \Delta^2 u_0 = -0,0000043769 \\ \Delta^3 u_0 = +0,000000277 \\ \Delta^4 u_0 = -0,000000003$$

En portant ces valeurs dans la formule générale, laquelle, puisqu'on néglige les différences cinquièmes et les suivantes, se réduit à :

$$u_x = u_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \\ + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 2 \right)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \\ + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 2 \right) \left(\frac{x-x_0}{h} - 3 \right)}{1.2.3.4} \Delta^4 u_0.$$

on obtient finalement :

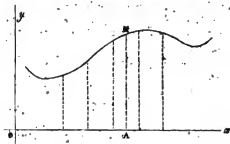
$$u_x \text{ ou } \text{Log } 3,1415926536 = 0,4971498726.$$

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION.

Soit une fonction $y = f(x)$, en considérant : x comme l'abscisse, et y comme l'ordonnée d'un point, l'équation $y = f(x)$, représente une courbe que nous savons construire lorsque la fonction $f(x)$ est donnée.

Si la fonction $f(x)$ est inconnue, et si de cette fonction on ne connaît qu'une suite de valeurs $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ correspondantes aux valeurs $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$ de la variable x .

On aura en construisant les ordonnées $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ correspondantes aux abscisses $x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \dots, x_0 + nh$, une série de points situés sur la courbe dont l'équation inconnue est $y = f(x)$.



On pourra au moyen de la formule

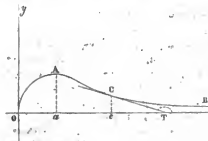
$$u_x = u_0 + \frac{x-x_0}{h} \Delta u_0 + \frac{\frac{x-x_0}{h} \left(\frac{x-x_0}{h} - 1 \right)}{1.2} \Delta^2 u_0 + \dots$$

calculer quelques ordonnées intermédiaires; alors les points ainsi obtenus seront assez rapprochés pour que, en les joignant par un trait continu, on puisse considérer la courbe ainsi décrite comme une représentation suffisamment exacte de la fonction inconnue $f(x)$.

Cette courbe, ainsi tracée, permet de calculer approximativement une valeur de $f(x)$ correspondante à une valeur quelconque de x comprise entre x_0 et $x_0 + nh$.

Si l'on veut avoir la valeur de $f(x)$ correspondante à une valeur x_p de x , on prendra $0A = x_p$ et en menant l'ordonnée MA que l'on terminera à la courbe en M , on aura en MA une valeur approchée de $f(x_p)$.

Une courbe étant ainsi tracée, on possède alors quelques notions sur sa forme, et quoique la question soit essentiellement indéterminée, on peut se proposer de déterminer l'équation de cette courbe, par l'observation de la forme qu'elle présente.



Supposons, par exemple, que l'on veuille déterminer l'équation de la courbe $0AB$, par rapport aux axes $y0, 0x$.

L'observation de cette courbe montre que :

1° Elle passe par l'origine, son équation doit donc être satisfaite pour $x=0$ et $y=0$.
2° L'ordonnée Aa est maximum, donc pour $x=0a$, l'équation $y=f(x)$ de la courbe doit donner $f'(0a)=0$, et $f''(0a) < 0$.

3° La courbe rencontre l'axe des x à l'infini, c'est-à-dire que l'équation de cette courbe doit être telle que pour $x = \infty$, on ait $y = 0$.

4° L'ordonnée y de la courbe doit rester constamment positive pour des valeurs positives de x .

Ces propriétés déduites de l'observation, seront simultanément établies par l'équation

$$y = \frac{ax}{bx^2 + c}$$

dans laquelle les coefficients a, b, c supposés positifs sont inconnus.

ici :
$$f(x) = \frac{ax}{bx^2 + c}$$

Par suite :

$$f'(x) = \frac{a(bx^2 + c) - 2bax^2}{(bx^2 + c)^2} = \frac{a(c - bx^2)}{(bx^2 + c)^2}$$

Et pour le point culminant A, on doit avoir :

$$c - bx^2 = 0. \text{ D'où : } x = \sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Et par suite :

$$y = a \frac{\sqrt{\frac{c}{b}}}{2c}.$$

On aura donc, les quantités Λa et Qa étant évaluées numériquement :

$$Qa = \sqrt{\frac{c}{b}} \quad (1)$$

$$\Lambda a = \frac{a \sqrt{\frac{c}{b}}}{2c} \quad (2)$$

Pour avoir une troisième équation, nécessaire avec (1) et (2), à la détermination des constantes a, b, c , on mènera la tangente en un certain point, le point C par exemple ; on évaluera avec soin l'angle $CTx = \alpha$, et l'on en déduira la troisième équation :

$$\lg \alpha = \frac{a(c - b \cdot \frac{c^2}{b})}{(b \cdot \frac{c^2}{b} + c)^2} \quad (3)$$

La résolution des équations (1), (2) et (3) fera connaître les constantes a, b, c .

Si l'on avait besoin de plus de constantes, on pourrait employer l'équation

$$y = \frac{ax^3}{bx^4 + cx^2 + dx + e}.$$

C'est par de telles considérations, que parfois, l'interprétation des données de l'expérience, conduit aux formules empiriques.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LA CONSTRUCTION DES RACINES RÉELLES DES ÉQUATIONS DE FORME QUELCONQUE À UNE INCONNUE.

Soit une équation à une inconnue

$$f(x) = 0.$$

Cette équation peut être considérée, d'une infinité de manières, comme

résultant de l'élimination de y entre deux équations :

$$F(x, y) = 0.$$

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Chacune de ces équations représente une courbe.

Si l'on construit avec soin ces deux courbes, les abscisses de leurs points d'intersection, lesquelles abscisses sont données par l'équation $f(x) = 0$, seront les racines réelles de l'équation proposée $f(x) = 0$.

Soit, par exemple, l'équation

$$2x - 4 \sin x - 1 = 0, \dots \quad (1)$$

dont on veut déterminer les racines réelles.

Posons : $y = \sin x$.

Alors les racines réelles de l'équation (1), sont les abscisses des points communs à la courbe

$$y = \sin x.$$

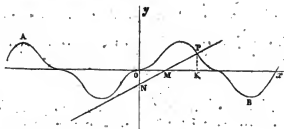
Et à la droite :

$$2x - 4y - 1 = 0.$$

La courbe

$$y = \sin x$$

construite précédemment est AB.



Les coordonnées à l'origine de la droite

$$2x - 4y - 1 = 0$$

sont :

$$OM = \frac{1}{2}, \quad ON = -\frac{1}{4}.$$

La droite MN ne rencontre la courbe AB qu'au seul point P dont l'abscisse OK est comprise entre 0 et π .

Convenons de considérer comme négatives, les erreurs angulaires comptées à gauche du rayon Om ; et comme positives, les erreurs angulaires comptées à droite.

Ceci posé, soit Fx une droite fixe, considérée comme axe polaire; au-dessus de cette droite et à partir de F , nous compterons les erreurs angulaires positives, et au-dessous nous compterons les erreurs angulaires négatives.

Alors si en F , avec Fx nous formons l'angle $\alpha Fp = \text{angle } O'mP$ et si sur la direction de Fp nous prenons $Fm_1 = Vm$, nous aurons en m_1 un point de la courbe d'erreur.



Supposons maintenant le point cherché en m' ; refaisons sur la première figure les constructions établies ci-dessus, et nous trouvons ainsi qu'à la distance inexacte Vm' correspond une erreur angulaire négative $P'm'O''$; les nouvelles coordonnées Vm' et $P'm'O''$ déterminent ainsi un nouveau point m_2 de la courbe d'erreur.

On en déterminera ainsi, autant que l'on voudra, $m_3, m_4, \dots$

On devra en prendre quelques-uns, correspondants à des erreurs angulaires positives.

Un assez grand nombre de points étant déterminés de la sorte, on les joint par un trait continu.

On obtient ainsi la courbe d'erreur.

Le point M , où cette courbe rencontre l'axe Fx , donne la distance FM pour laquelle l'erreur angulaire est nulle; c'est-à-dire la distance pour laquelle la bissectrice de l'angle AmB se confond avec le rayon Om .

On a donc ainsi l'inconnue de la question.

NOTIONS ÉLÉMENTAIRES

DE

CALCUL INTÉGRAL.

On appelle *intégrale* d'une fonction $f(x)$, la fonction dont $f(x)$ est la dérivée.

Si l'on désigne par $F(x)$ la fonction dont la dérivée est $f(x)$, la relation qui existe entre $F(x)$ et $f(x)$ s'indique ainsi :

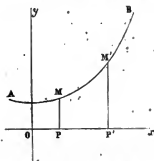
$$F(x) = \int f(x).dx.$$

Et s'énonce :

$$F(x) = \text{somme de } f(x).dx.$$

THÉORÈME. — Une fonction quelconque $f(x)$ a toujours une intégrale.

En effet, supposons que l'on construise la courbe représentée par l'équation $y = f(x)$; et soit AB cette courbe.



Si l'on prend une ordonnée fixe MP et une ordonnée mobile M'P', on a, d'après le principe de la différentielle de l'aire d'une courbe :

$$d(\text{surf. MPM}'P') = y.dx,$$

ou bien :

$$d(\text{surf. MPM}'P') = f(x).dx.$$

Il est évident que la surface MPM'P', qui varie avec x , est une fonction de x ; si donc, on désigne par $F(x)$ l'expression de la surface MPM'P', on aura :

$$d.F(x) = f(x).dx.$$

Done la fonction $F(x)$ est l'intégrale de $f(x)$, puisqu'elle a pour différentielle $f(x).dx$ et pour dérivée $f(x)$.

Remarque I. — Une fonction a une infinité d'intégrales, car si $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$, la fonction $F(x) + C$ (C étant une constante quelconque) a aussi pour dérivée $f(x)$.

Remarque II. — Les signes $\int$ et d , placés consécutivement, se détruisent, ainsi

$$\int df(x) = f(x).$$

L'intégrale étant l'inverse de la dérivée, il en résulte que toutes les formules relatives aux dérivées ou aux différentielles, donnent des théorèmes sur les intégrales.

Ainsi l'on a : u, v, w étant des fonctions d' x :

$$d(u + v + w) = du + dv + dw = u'dx + v'dx + w'dx = (u' + v' + w')dx.$$

De là, on tire :

$$\int (u' + v' + w') dx = u + v + w = \int u' dx + \int v' dx + \int w' dx.$$

C'est-à-dire que : l'intégrale de la somme de plusieurs fonctions, est égale à la somme des intégrales de ces fonctions.

On a : $dA \cdot u = A \cdot du = Au' dx$,
d'où l'on tire :

$$\int Au' dx = A \cdot u = A \cdot \int u' dx.$$

C'est-à-dire que : l'intégrale du produit d'une constante par une fonction est égale au produit de la constante par l'intégrale de la fonction. Donc dans une intégrale, on pourra s'il y en a, faire sortir les facteurs constants hors du signe $\int$.

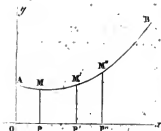
Il résulte de ce principe, que si l'on sait intégrer $f(x) \cdot dx$, on saura intégrer $f(ax + b) \cdot dx$. En effet, on a $d(ax + b) = adx$; donc $dx = \frac{1}{a} d(ax + b)$, et par suite :

$$\int f(ax + b) dx = \int \frac{1}{a} f(ax + b) d(ax + b) = \frac{1}{a} \int f(ax + b) d(ax + b).$$

Donc si $\int f(x) dx = \Phi(x)$, on aura :

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} \Phi(ax + b).$$

DE L'INTÉGRALE DÉFINIE.



Si l'on construit la courbe AB, dont l'équation est $y = f(x)$ et si l'on compte les aires à partir de l'ordonnée fixe MP; on a en désignant par $F(x)$ la fonction d' x qui représente l'aire comptée à partir de MP :

$$F(x) = \int f(x).dx.$$

Et si l'on prend deux valeurs de x , $OP' = a$, $OP'' = b$, on aura :

$$F(a) \text{ ou aire MPM}'P' = \int f(x).dx \text{ pour } x = a.$$

$$F(b) \text{ ou aire MPM}''P'' = \int f(x).dx \text{ pour } x = b.$$

La différence $F(b) - F(a)$ représente l'aire $MTM''P''$ obtenue en faisant $x = a$ et $x = b$ dans $\int f(x).dx$ et en prenant la différence des résultats. On convient de désigner cette différence par la notation

$$\int_a^b f(x).dx$$

que l'on énonce : *somme de a à b de $f(x).dx$.*

On dit alors que $\int_a^b f(x).dx$ est une intégrale définie, et l'on a :

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a).$$

a et b sont dites les limites de l'intégrale définie.

Remarque. — 1° Le renversement des limites a et b change le signe de l'intégrale définie; en effet, par définition :

$$\int_b^a f(x).dx = F(a) - F(b) = -[F(b) - F(a)] = - \int_a^b f(x).dx.$$

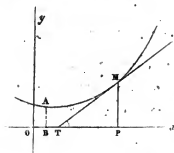
2° Si c et d sont des nombres compris entre a et b , la décomposition de l'aire $M'P'M''P''$ montre que l'on pourra écrire :

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^d f(x).dx + \int_d^b f(x).dx.$$

Si l'on conçoit l'intervalle de a à b divisé en parties infiniment petites et si x_1, x_2, x_3, x_n sont les abscisses des points de division, on aura :

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^{x_1} f(x).dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx + \dots + \int_{x_n}^b f(x).dx.$$

On voit ainsi que l'intégrale définie $\int_a^b$ représente : la somme des éléments de surface infiniment petits, dont se compose l'aire totale comprise entre les limites a et b .



Remarques sur la représentation graphique d'une fonction.

Si l'on construit la courbe
 $y = f(x)$

1° L'ordonnée MP, d'un point de la courbe correspondant à l'abscisse OP, représente la valeur de fonction $f(x)$ pour $x = OP$.

2° Si l'on mène la tangente MT en un point M de la courbe, on a :

$$\operatorname{tg} MTx = f'(OP).$$

3° L'aire de la courbe, comprise entre l'ordonnée MP et une autre ordonnée AB, représente l'intégrale définie :

$$\int_{OB}^{OP} f(x).dx.$$

RECHERCHE DES INTÉGRALES INDÉFINIES.

Si $F(x)$ a pour dérivée $f(x)$, on a :

$$F(x) = \int f(x).dx.$$

Et l'on dit que $\int f(x).dx$ est une intégrale indéfinie. Puisque la différentiation fait disparaître les constantes, il faudra les rétablir pour compléter les résultats de l'intégration.

On aura donc, en appliquant ce principe à quelques fonctions connues :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int -\sin x, dx = \cos x + C.$$

$$\int \cos x, dx = \sin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$\int \operatorname{tg} x \sec x dx = \sec x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{ou} \quad -\arccos x + C.$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \quad \text{ou} \quad -\arcsin x + C.$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C \quad \text{ou} \quad -\operatorname{arccot} x + C.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C \quad \text{ou} \quad -\operatorname{arccosec} x + C.$$

Remarque sur l'intégrale

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

Le principe

$$dx^m = mx^{m-1}dx,$$

d'où l'on déduit l'intégrale

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C.$$

a lieu quelle que soit la constante m ; donc l'intégrale.

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

a lieu quelle que soit la constante m .

Cette intégrale donne lieu aux intégrales suivantes :

$$\int \sqrt[m]{x} dx = \int x^{\frac{1}{m}} dx = \frac{x^{\frac{1}{m}+1}}{\frac{1}{m}+1} + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C.$$

Remarque sur l'intégrale

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

L'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ peut s'écrire $\int x^{-1} dx$; en sorte que si l'on applique à cette intégrale, le principe

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

on a : pour $m = -1$,

$$\int x^{-1} dx \text{ ou } \int \frac{dx}{x} = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{1}{0} + C.$$

Il semble donc que $\int \frac{dx}{x} = \infty$; pour expliquer cette singularité, et afin de retrouver

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

reprenons l'expression générale

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

et remarquons-y que : la constante C étant indéterminée, on peut donner à cette constante la forme

$$-\frac{1}{m+1} + C',$$

en sorte que l'on aura :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} + C'.$$

D'où :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}-1}{m+1} + C'.$$

Pour $m = -1$, cette équation devient :

$$(1) \dots \dots \int \frac{dx}{x} = \frac{1-1}{-1+1} + C' = \frac{0}{0} + C'.$$

Afin d'avoir la véritable valeur de l'expression

$$\frac{x^{m+1}-1}{m+1},$$

laquelle devient $\frac{0}{0}$ pour $m = -1$, prenons les dérivées du numérateur et du dénominateur, en remarquant qu'ici m est la variable; alors la dérivée de $x^{m+1}-1$ est $x^{m+1} \log x$, et la dérivée de $m+1$ est 1, et pour $m = -1$, le rapport de ces dérivées est $\log x$. Donc

$$\lim \frac{x^{m+1}-1}{m+1} = \log x.$$

Et par suite :

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

Cette particularité indique le rôle que peut jouer la constante dans une intégrale.

MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

Soient u et v deux fonctions de la variable indépendante de x , on a :

$$du.v = v.du + u.dv.$$

D'où :

$$v.du = du.v - u.dv.$$

Et en intégrant

$$\int v \cdot du = \int d \cdot uv - \int u \cdot dv.$$

Ou bien :

$$\int v \cdot du = u \cdot v - \int u \cdot dv.$$

Tel est le principe de l'intégration par parties.

Ce principe montre que : si l'on a à intégrer $v \cdot du$, la difficulté est ramenée à intégrer $u \cdot dv$.

D'UN PRINCIPE FACILE ET COMMUNE, AU MOYEN DUQUEL ON PEUT GÉNÉRALEMENT DÉTERMINER, PRESQUE SANS ARTIFICES DE CALCUL, LES INTÉGRALES SIMPLES.

Les spéculations trigonométriques permettent de faire disparaître aisément un radical, un dénominateur, et sous ce rapport leur emploi nous sera d'une grande ressource dans le calcul d'une intégrale.

La représentation d'une variable : par un sinus ou un cosinus, si elle doit être moindre que 1 ; par une sécante, si elle doit être plus grande que 1 ; ou enfin par une tangente, si la variable doit être quelconque ou n'est indiquée par aucun limite, nous permettra d'éviter dans le calcul des intégrales simples certains artifices considérés comme d'autant plus élégants, que, tout imprévus, ils conduisent au résultat.

En dehors de la représentation de la variable par une ligne trigonométrique, convenablement choisie, il est impossible jusqu'à présent d'indiquer une marche générale pour déterminer une intégrale quelconque ; néanmoins, comme on va le voir dans la suite, la recherche d'une telle inconnue pour les cas simples et usuels sera toujours ramenée à des spéculations trigonométriques.

Nous n'aurons généralement besoin, pour tous les cas, que des principes suivants :

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \int e^{mx} dx = \frac{e^{mx}}{m} + C, \quad \int \frac{dx}{x} = \log x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

Afin de ne pas revenir constamment sur les mêmes calculs, nous traiterons d'abord les intégrales suivantes :

I. Calculer : $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

On a :

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \log \cos x + C.$$

II. Calculer : $\int \sin^2 x \, dx$.

On a :

$$\int \sin^2 x \, dx = \int \sin x \sin x \, dx = \int \sin x \, d(-\cos x).$$

Et en appliquant le principe d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \sin x \, d(-\cos x) &= -\sin x \cos x - \int (-\cos x) \, d \sin x = \\ &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \, dx &= -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx, \\ &= -\sin x \cos x + \int (1 - \sin^2 x) \, dx, \\ &= -\sin x \cos x + \int dx - \int \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Et en faisant passer $-\int \sin^2 x \, dx$, dans le premier membre et divisant par 2, de part et d'autre, il vient finalement :

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C.$$

III. Calculer : $\int \cos^2 x \, dx$.

On a successivement :

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx = \int \cos x \, d \sin x.$$

or, d'après le principe d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \cos x \, d \sin x &= \sin x \cos x - \int \sin x \, d \cos x = \\ &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \sin x \cos x + \int \sin^2 x \, dx = \\ &= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \\ &= \sin x \cos x + \int dx - \int \cos^2 x \, dx.\end{aligned}$$

et en faisant passer $-\int \cos^2 x \, dx$ dans le premier nombre, puis divisant par 2, de part et d'autre, il vient finalement :

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2} + C.$$

IV. Calculer : $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

On a successivement :

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx.$$

Or : $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + \dots$, donc :

$$\int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

V. Calculer : $\int \sin^2 x \, dx$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int \sin^2 x \, d(-\cos x) = \\ &= - \int \sin^2 x \, d \cos x = - \int (1 - \cos^2 x) \, d \cos x = \\ &= - \int d \cos x + \int \cos^2 x \, d \cos x.\end{aligned}$$

Or :

$\int d \cos x = \cos x$, et le principe $\int x^n dx$ donne :

$$\int \cos^2 x \, d \cos x = \frac{\cos^3 x}{3}, \text{ donc enfin :}$$

$$\int \sin^2 x \, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

VI. Calculer : $\int \cos^2 x \, dx$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \, dx &= \int \cos^2 x \cos x \, dx = \int \cos^2 x \, d \sin x = \\ &= \int (1 - \sin^2 x) \, d \sin x = \int d \sin x - \int \sin^2 x \, d \sin x = \\ &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

VII. Calculer : $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^2 x} = \int \sin^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \sin^2 x \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin^2 x \cdot 2 \operatorname{tg} x \, d \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \int \sin^2 x \, d \operatorname{tg}^2 x. \end{aligned}$$

Et en remplaçant $\sin^2 x$ par sa valeur $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, en fonction de la tangente, il vient :

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \, d \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot d(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x - 1) \cdot d(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{2} \int d(1 + \operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{2} \log(1 + \operatorname{tg}^2 x). \end{aligned}$$

VIII. Calculer : $\int \frac{dx}{\sin x}$.

On a successivement :

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{d \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{\sin \frac{x}{2}} = \\
 &= \int \frac{d \lg \frac{x}{2}}{\lg \frac{x}{2}} = \log \lg \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

IX. Calculer : $\int \frac{dx}{\cos x}$.

On a :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin(90^\circ - x)} = \int \frac{dx}{\sin(90^\circ + x)} = \int \frac{d(90^\circ + x)}{\sin(90^\circ + x)}.$$

On rentre ainsi dans l'intégrale précédente, laquelle donne :

$$\int \frac{d(90^\circ + x)}{\sin(90^\circ + x)} \text{ ou } \int \frac{dx}{\cos x} = \log \lg \left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) + C.$$

X. Calculer : $\int \frac{dx}{\lg x}$.

On a successivement :

$$\int \frac{dx}{\lg x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \log \sin x + C.$$

XI. Calculer : $\int \frac{dx}{\lg^2 x}$.

On a :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\lg^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x \, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) \, dx}{\sin^2 x} = \\
 &= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\cot x - x + C.
 \end{aligned}$$

XII. Calculer : $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

On a successivement :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\sin x} d(-\cot x) = \\ &= - \int \frac{1}{\sin x} d \cot x.\end{aligned}$$

Et en appliquant le principe d'intégration par parties, il vient :

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = - \frac{1}{\sin x} \cot x + \int \cot x d \left(\frac{1}{\sin x} \right).$$

Or :

$$d \left(\frac{1}{\sin x} \right) = - \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^3 x} &= - \frac{1}{\sin x} \cot x - \int \cot x \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{\cos^2 x dx}{\sin^2 x} = \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{(1 - \sin^2 x) dx}{\sin^2 x} = \\ &= - \frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^2 x} + \int \frac{dx}{\sin x}.\end{aligned}$$

Et en faisant passer $-\int \frac{dx}{\sin^2 x}$, dans le premier membre; puis divisant par 2 de part et d'autre, il vient :

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin x}.$$

D'où enfin, puisqu'on a trouvé (Int. VIII) : $\int \frac{dx}{\sin x} = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = - \frac{1}{2} \frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

XIII. Calculer : $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

On a :

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{dx}{\sin^3 (90^\circ - x)} = - \int \frac{d(90^\circ - x)}{\sin^3 (90^\circ - x)}.$$

Cette intégrale rentre donc dans la précédente : il suffit de changer les signes de l'intégrale précédente, et d'y remplacer x par $90^\circ - x$, ce qui donne :

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{x}{2} \right) + C.$$

XIV. Calculer : $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x}$.

En suivant la marche indiquée dans le calcul de $\int \operatorname{tg}^3 x dx$, on a successivement :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^3 x} &= \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^3 x} = \int \cos^2 x \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= -\frac{1}{2} \int \cos^2 x \cdot \cot x \cdot d \cot x = -\frac{1}{2} \int \cos^2 x \cdot d \cot^2 x = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x} d(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{2} \int \frac{1 + \cot^2 x - 1}{1 + \cot^2 x} d(1 + \cot^2 x) = \\ &= -\frac{1}{2} (1 + \cot^2 x) + \log(1 + \cot^2 x) + C. \end{aligned}$$

XV. Calculer $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

On a successivement :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot d \operatorname{tg} x = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

DU CALCUL DE QUELQUES INTÉGRALES.

I. Soit à calculer : $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Le radical devant être réel, x doit être moindre que a , nous poserons donc :

$$x = a \sin \varphi.$$

D'où en différenciant :

$$dx = a \cos \varphi d\varphi.$$

L'expression proposée devient donc par substitution :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a^m \sin^m \varphi \cdot a \cos \varphi d\varphi}{a \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = a^m \int \sin^m \varphi d\varphi = \\ &= a^m \int \sin^{m-1} \varphi \sin \varphi d\varphi = -a^m \int \sin^{m-1} \varphi d \cos \varphi.\end{aligned}$$

Et en appliquant le principe d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ou } a^m \int \sin^m \varphi d\varphi &= -a^m \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + a^m \int \cos \varphi d \sin^{m-1} \varphi = \\ &= -a^m \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + a^m \int \cos \varphi \cdot (m-1) \sin^{m-2} \varphi \cdot \cos \varphi d\varphi = \\ &= -a^m \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + (m-1) a^m \int \cos^2 \varphi \sin^{m-2} \varphi d\varphi = \\ &= -a^m \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + (m-1) a^m \int (1 - \sin^2 \varphi) \sin^{m-2} \varphi d\varphi = \\ &= -a^m \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + (m-1) a^m \int \sin^{m-2} \varphi d\varphi - (m-1) a^m \int \sin^m \varphi d\varphi.\end{aligned}$$

En faisant passer $-(m-1) a^m \int \sin^m \varphi d\varphi$ dans le premier membre ; puis divisant par m de part et d'autre, il vient :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \text{ ou } a^m \int \sin^m \varphi d\varphi = -\frac{a^m}{m} \sin^{m-1} \varphi \cos \varphi + \frac{m-1}{m} a^m \int \sin^{m-2} \varphi d\varphi.$$

La question est donc ramenée à calculer :

$$\int \sin^{m-2} \varphi d\varphi.$$

L'exposant m a donc diminué de 2 unités. On ramènera de même le calcul de $\int \sin^{m-2} \varphi d\varphi$ au calcul de $\int \sin^{m-4} \varphi d\varphi$, et ainsi de suite ; on diminuera successivement de 2 unités l'exposant m . En sorte que si m est pair, on est en dernier lieu, conduit à calculer $\int d\varphi = \varphi$; et si m est impair, on est ramené au calcul de

$$\int \sin \varphi d\varphi = -\cos \varphi + C.$$

L'intégration de $a^m \int \sin^m \varphi \, d\varphi$ ou $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ est donc chose acquise. —

Remarque. Les deux derniers cas auxquels on est conduit $\int d\varphi$ et $\int \sin \varphi \, d\varphi$ reviennent à faire les hypothèses $m = 0$ et $m = 1$ dans l'expression $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Or :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^m \int \sin^m \varphi \, d\varphi \dots (1).$$

Pour $m = 0$, cette équation devient :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\varphi = \varphi + C.$$

mais $x = a \sin \varphi$, donc $\varphi = \arcsin \frac{x}{a}$ et par suite

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Pour $m = 1$, l'équation (1) devient :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \int \sin \varphi \, d\varphi = -a \cos \varphi + C.$$

et puisque $x = a \sin \varphi$, on en déduit

$$\sin \varphi = \frac{x}{a} \text{ et } \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Et par suite :

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

II. Soit à calculer : $\int \frac{dx}{a + bx^2}$.

On a :

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} + \int \frac{dx}{a \left(1 + \frac{b}{a}x^2\right)} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{1 + \frac{b}{a}x^2} \dots (1)$$

Supposons a et b positifs et posons :

$$\sqrt{\frac{b}{a}} x = \operatorname{tg} \varphi.$$

En différentiant, il vient :

$$\sqrt{\frac{b}{a}} dx = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \text{ d'où } dx = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a + bx^2} &= \frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\sec^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int d\varphi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{ab}} \varphi + C. \end{aligned}$$

Or, l'équation $\sqrt{\frac{b}{a}} x = \operatorname{tg} \varphi$ donne : $\varphi = \arctg \sqrt{\frac{b}{a}} x$, donc enfin :

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctg \left(\sqrt{\frac{b}{a}} x \right) + C.$$

III. Soit à calculer : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \dots r$

L'inspection du radical, montre que x peut être quelconque par rapport à a . Nous poserons donc :

$$x = a \operatorname{tg} \varphi.$$

D'où :

$$dx = a \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Par suite :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \int \frac{a \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \int \frac{\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\frac{1}{\cos \varphi}} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

On a trouvé (intég. n° IX, page 172) :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Donc :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Mais on sait par la trigonométrie, que :

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Donc :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log \left(\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right).$$

Et puisque $x = a \operatorname{tg} \varphi$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{a}$.

Donc enfin :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} \right).$$

IV. Soit à calculer : $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}}$.

Le radical devant être réel, ax doit être moindre que 1, nous posons donc :

$$ax = \sec \varphi \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi.$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} &= \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi}{\sqrt{\sec^2 \varphi - 1}} = \frac{1}{a} \int \frac{\operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi} = \\ &= \frac{1}{a} \int \sec \varphi d\varphi = \frac{1}{a} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Mais on a trouvé (intég. n° IX, page 172).

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

donc :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \frac{1}{a} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

et, puisque la trigonométrie donne la formule :

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

On a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \frac{1}{a} \log (u_\varphi + \sqrt{1 + u_\varphi^2}) + C$$

ou ce qui revient au même :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \frac{1}{a} \log (\sec \varphi + \sqrt{\sec^2 \varphi - 1}) + C.$$

Et puisque $\sec \varphi = ax$, on a finalement :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 x^2 - 1}} = \frac{1}{a} \log (ax + \sqrt{a^2 x^2 - 1}) + C.$$

Cette intégrale rentre dans la précédente.

V. Soit à calculer : $\int x \sqrt{x - x^2} dx$.

on a :

$$\int x \sqrt{x - x^2} dx = \int x \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} dx. \quad (1).$$

L'inspection du radical montre que $x - \frac{1}{2}$ doit être moindre que $\frac{1}{2}$, nous poserons donc :

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \varphi \quad \text{d'où } x = \frac{1}{2} (1 + \sin \varphi).$$

Et en différentiant $dx = \frac{1}{2} \cos \varphi d\varphi$.

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x - x^2} dx &= \int \frac{1}{2} (1 + \sin \varphi) \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{2} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \int \frac{1}{8} (1 + \sin \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \int \cos^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{8} \int \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \int \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{8} \int \cos^2 \varphi d \cos \varphi. \quad (2) \end{aligned}$$

or, on a trouvé (intég. n° III, page 169) :

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}.$$

en outre :

$$\int \cos^2 \varphi \, d \cos \varphi = \frac{\cos^3 \varphi}{3}.$$

l'équation (2) devient donc par substitution :

$$\int x \sqrt{x-x^2} \, dx = \frac{1}{16} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{16} - \frac{1}{24} \cos^3 \varphi + C. \quad (3).$$

Or, l'équation $x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \varphi$ donne :

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= 2x-1, \quad \cos \varphi = \sqrt{4x-4x^2} = 2 \sqrt{x-x^2}, \\ \varphi &= \arcsin (2x-1). \end{aligned}$$

en sorte que l'équation (3) devient finalement :

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x-x^2} \, dx &= \frac{1}{16} 2 (2x-1) \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{16} \arcsin (2x-1) - \\ &\quad - \frac{1}{24} 8 (x-x^2) \sqrt{x-x^2} + C. \\ &= \frac{8x^2-2x-3}{24} \sqrt{x-x^2} + \frac{1}{16} \arcsin (2x-1) + C. \end{aligned}$$

VI. Soit à calculer : $\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}}.$

On a :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}}. \quad (1).$$

l'inspection du radical montre que $\frac{a}{2} - x$ doit être moindre que $\frac{a}{2}$, nous poserons donc :

$$\frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} \cos \varphi.$$

d'où en différentiant :

$$dx = \frac{a}{2} \sin \varphi \, d\varphi.$$

l'équation (1) devient donc par substitution :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \frac{\frac{a}{2} \sin \varphi \, d\varphi}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} \cos^2 \varphi}} = \int d\varphi = \varphi + C.$$

Or, l'équation $\frac{a}{2} - x = \frac{a}{2} \cos \varphi$ donne :

$$\varphi = \arccos \frac{a-2x}{a}.$$

donc :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} = \arccos \left(\frac{a-2x}{a} \right) + C.$$

VII. Soit à calculer : $\int \arcsin x \, dx$.

Posons $x = \sin \varphi$, alors $\arcsin x = \varphi$ et $dx = \cos \varphi \, d\varphi$:

par suite :

$$\int \arcsin x \, dx = \int \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \int \varphi \, d \sin \varphi.$$

D'où en intégrant par parties :

$$\int \arcsin x \, dx = \varphi \sin \varphi - \int \sin \varphi \, d\varphi = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi + C.$$

et en remplaçant : φ , $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par leurs valeurs, $\arcsin x$, x et $\sqrt{1-x^2}$, il vient finalement :

$$\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

VIII. Soit à calculer : $\int \arctg x \, dx$.

Posons $x = \operatorname{tg} \varphi$, alors $\varphi = \arctg x$ et $dx = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$.

par suite :

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \int \frac{\varphi \, d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \int \varphi \cdot d \operatorname{tg} \varphi.$$

d'où en intégrant par parties :

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \varphi \operatorname{tg} \varphi - \int \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi.$$

mais on a trouvé (intég. n° 1, page 169) :

$$\int \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi = -\log \cos \varphi + C.$$

donc :

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = \varphi \operatorname{tg} \varphi + \log \cos \varphi + C.$$

Et en remplaçant φ , $\operatorname{tg} \varphi$ et $\cos \varphi$ par leurs valeurs

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} \varphi = x \text{ et } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

il vient :

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \right) + C.$$

ou bien :

$$\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \, dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \log \sqrt{1 + x^2} + C.$$

IX. Soit à calculer $\int \log x \, dx$.

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned} \int \log x \, dx &= x \log x - \int x \, d \log x \\ &= x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x \log x - \int dx \\ &= x \log x - x + C = x (\log x - 1) + C \\ &= x (\log x - \log e) + C = x \log \left(\frac{x}{e} \right) + C. \end{aligned}$$

X. Soit à intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n^2y \dots \dots (1)$$

dans laquelle x est la variable indépendante.

Posons :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi \dots \dots (2)$$

la différentiation de cette équation donne, puisque x étant la variable indépendante dx est constant :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

d'où en divisant par dx , de part et d'autre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} = n^2y \dots \dots (3)$$

L'équation (2) donne :

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\cos \varphi \cdot dy}{\sin \varphi}$$

et en portant cette valeur dans (3), il vient :

$$\frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^3 \varphi \cdot dy} = n^2y$$

d'où l'on tire successivement :

$$\frac{\sin \varphi \cdot d\varphi}{\cos^3 \varphi} = n^2y \cdot dy$$

$$- \frac{d \cos \varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} n^2 2y dy$$

$$- \cos^{-3} \varphi \cdot d \cos \varphi = \frac{1}{2} n^2 d(y^2)$$

$$\text{Or : } \cos^{-3} \varphi \cdot d \cos \varphi = d \frac{\cos^{-3+1} \varphi}{-3+1} = -\frac{1}{2} d \frac{1}{\cos^2 \varphi}$$

donc :

$$d\left(\frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) = n^2 y^2.$$

Et en intégrant, il vient, C^2 étant une constante arbitraire,

$$\frac{1}{\cos^2 \varphi} = C^2 n^2 y^2.$$

mais $\frac{1}{\cos^2 \varphi} = \sec^2 \varphi = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi$, par suite :

$$1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = C^2 n^2 y^2.$$

En remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par sa valeur $\frac{dy}{dx}$,

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = C^2 n^2 y^2.$$

cette équation donne :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}}.$$

d'où :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}}.$$

ou bien :

$$dx = \frac{1}{Cn} \cdot \frac{dCny}{\sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}}.$$

d'où en intégrant, il vient, a étant une constante arbitraire, et puisque

$$\int \frac{dCny}{\sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}} = \log (Cny + \sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}) \text{ (intég. n° IV, page 178).}$$

$$a + x = \frac{1}{Cn} \cdot \log (Cny + \sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}) \dots \dots (4)$$

Par suite :

$$e^{Cn(a+x)} = Cny + \sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1}.$$

Ou bien si l'on appelle A , le facteur constant qui multiplie e^{nx} , il vient :

$$A \cdot e^{nx} = Cny + \sqrt{C^2 n^2 y^2 - 1} \dots \dots (m)$$

L'équation (4) donne, en multipliant haut et bas et entre parenthèses

par $Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}$,

$$a + x = \frac{1}{Cn} \log \left(\frac{1}{Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}} \right).$$

mais on sait que $\log \left(\frac{a}{b} \right) = -\log \left(\frac{b}{a} \right)$, donc :

$$a + x = -\frac{1}{Cn} \log (Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}).$$

et par suite :

$$-Cn(a + x) = \log (Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}).$$

d'où :

$$e^{-Cn(a+x)} = Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}.$$

ou bien si l'on appelle B, le facteur numérique constant qui multiplie e^{-nx} ,

$$B e^{-nx} = Cny - \sqrt{C^2n^2y^2 - 1}.$$

En ajoutant cette équation à l'équation (m), il vient :

$$A e^{nx} + B e^{-nx} = 2Cny.$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2Cn} (A e^{nx} + B e^{-nx}).$$

et plus simplement, en appelant A' et B' les quotients de A et de B divisés par $2Cn$:

$$y = A' e^{nx} + B' e^{-nx}.$$

Telle est la fonction cherchée.

XI. Soit à intégrer l'équation :

$$x dy - y dx = \sqrt{x^2 + y^2} dx \dots\dots (1)$$

Posons $y = x \operatorname{tg} \varphi$, d'où en différentiant :

$$dy = \operatorname{tg} \varphi \cdot dx + \frac{x \cdot d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

l'équation (1) devient donc en y remplaçant y et dy par ces valeurs :

$$x \cdot \operatorname{tg} \varphi \, dx + \frac{x^2 d\varphi}{\cos^2 \varphi} - x \cdot \operatorname{tg} \varphi \, dx = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \, dx.$$

D'où :

$$x^2 \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = x \cdot \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \, dx.$$

par suite en supprimant le facteur commun x et remarquant que

$$\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sec \varphi = \frac{1}{\cos \varphi}, \text{ il vient :}$$

$$x \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{dx}{\cos \varphi}.$$

D'où :

$$\frac{dx}{x} = \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

et en intégrant il vient, $\log C$ étant une constante arbitraire :

$$\log x - \log C = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Mais on a trouvé (intégr. n° IX, page 172) :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}).$$

donc :

$$\log \frac{x}{C} = \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}).$$

Par suite .

$$x = C (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}).$$

et puisque $y = x \operatorname{tg} \varphi$, il vient, en remplaçant $\operatorname{tg} \varphi$ par sa valeur $\frac{y}{x}$:

$$x = C \left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right),$$

ou bien :

$$x^2 = C (y + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR SÉRIES.

Cette méthode est basée sur le principe suivant :

Soit une fonction $f(x)$ laquelle développée en série donne :

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + R, \dots \quad (1)$$

si la série du second membre est convergente pour toute valeur de x comprise entre deux limites a et x , la série :

$$\begin{aligned} (2) \dots \int_a^x f(x) \cdot dx &= \int_a^x u_1 \cdot dx + \int_a^x u_2 \cdot dx + \int_a^x u_3 \cdot dx + \dots + \\ &\dots \int_a^x u_n \cdot dx + \int_a^x R \cdot dx \end{aligned}$$

est aussi convergente.

En effet, la série (1) étant convergente, on pourra toujours prendre n assez grand pour que R soit moindre que toute quantité donnée ε . Si

je démontre que $\int_a^x R \cdot dx$ jouit de la même propriété, il sera établi

que la série (2) est convergente.

L'inégalité $R < \varepsilon$ donne :

$$\int_a^x R \cdot dx < \int_a^x \varepsilon \cdot dx.$$

or :

$$\int_a^x \varepsilon \cdot dx = \varepsilon \int_a^x dx = \varepsilon (x - a).$$

donc :

$$\int_a^x R \cdot dx < \varepsilon (x - a).$$

la quantité $\varepsilon (x - a)$ sera elle-même moindre que toute quantité

donnée si x et a sont des quantités finies. Donc la série (2) est convergente.

Développement de arc tg x en série.

On a $d \text{ arc tg } x = \frac{dx}{1+x^2}$, d'où,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x + C.$$

et puisque pour $x = 0$, $\text{arc tg } x = 0$, on a :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg } x.$$

La division algébrique donne :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \pm \frac{x^{2n}}{1+x^2}.$$

nous aurons donc :

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \dots \pm \int_0^x \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx.$$

ou bien puisque :

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} &= \text{arc tg } x, \int_0^x dx = x, \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}, \int_0^x x^4 dx = \frac{x^5}{5}, \dots \\ \text{arc tg } x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \end{aligned}$$

Cette formule est convergente pour $x < 1$. Elle est aussi convergente pour $x = 1$, car les termes de la série :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

sont alternativement positifs et négatifs et vont en décroissant.

$$\text{Pour } x = 1, \quad \text{arc tg } x = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

on a donc :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

et par suite :

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

Cette série permet de calculer le nombre π , elle est peu commode en ce que sa convergence n'est pas assez rapide. Il faudrait y prendre un trop grand nombre de termes pour calculer π avec une approximation suffisante.

Développement de arc sin x en série et calcul du nombre π .

On a :

$$d \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

par suite :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \operatorname{arc} \sin x + C.$$

et puisque pour $x = 0$, $\operatorname{arc} \sin x = 0$, on a :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x.$$

Le développement du binôme donne :

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^6 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^8 + \dots$$

d'où :

$$\int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^x dx + \frac{1}{2} \int_0^x x^2 dx +$$

$$\frac{1.3}{2.4} \int_0^x x^4 dx + \frac{1.3.5}{2.4.6} \int_0^x x^6 dx + \dots$$

et en intégrant :

$$(1) \dots \text{arc sin } x = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^7 + \dots$$

Tel est le développement de arc sin x en série.

Pour $x = \frac{1}{2}$, arc sin $x = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, en sorte que la formule (1) trouvée ci-dessus donne :

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \dots$$

Cette série est convergente et permet de calculer π .



APPLICATIONS DIVERSES.

PROBLÈME DES TANGENTES.

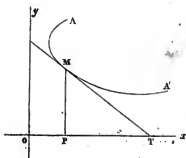
Tangente à une courbe algébrique.

L'équation d'une courbe étant $f(x, y) = 0$, l'équation de sa tangente a pour coefficient angulaire :

$$\frac{dy}{dx}$$

pour déterminer le rapport $\frac{dy}{dx}$, on différencie l'équation $f(x, y) = 0$ et l'on obtient comme on l'a vu plus haut :

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}}$$

Expression de la sous-tangente.

Soit une courbe AA' rapportée à des axes rectangulaires ; considérons la tangente MT de cette courbe au point M .

La portion TP de l'axe des x , comprise entre l'ordonnée du point de contact et la tangente, est appelée la *sous-tangente*. La longueur TP se désigne par ST .

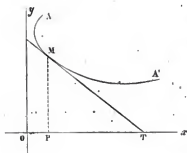
Le triangle MTP donne :

$$TP = y. \operatorname{tg} \angle PMT = \frac{y}{\operatorname{tg} \angle PMT}$$

On a donc pour la valeur absolue de la sous-tangente :

$$ST = \frac{y \cdot dx}{dy}$$

Expression de la longueur de la tangente.



On appelle *longueur de la tangente*, la portion MT de la tangente comprise entre le point de tangence et l'axe des x .

En appelant T cette longueur, le triangle rectangle MTP donne :

$$T^2 = y^2 + TP^2 = y^2 + ST^2.$$

d'où :

$$T^2 = y^2 + \frac{y^2 \cdot dx^2}{dy^2} = y^2 \left(1 + \frac{dx^2}{dy^2} \right).$$

par suite :

$$T = y \cdot \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

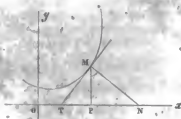
On peut mettre T sous la forme

$$T = \frac{y}{dy} \sqrt{dy^2 + dx^2}.$$

en sorte que $\sqrt{dy^2 + dx^2}$ représentant ds , on a aussi :

$$T = \frac{y \cdot ds}{dy}.$$

Expression de la sous-normale.



L'ordonnée d'un point M étant MP , la normale en ce point étant MN , la distance NP est dite la *sous-normale*, que l'on désigne par SN .

Le triangle rectangle MNP donne :

$$NP \text{ ou } SN = MP \cdot \operatorname{tg} \angle PMN.$$

d'où :

$$SN = \frac{y \cdot dy}{dx}$$

Telle est l'expression de la sous-normale.

Remarque. — L'équation de la parabole étant

$$y^2 = 2px$$

on en tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

et par suite,

$$SN \text{ ou } y \frac{dy}{dx} = p.$$

Résultat obtenu en géométrie.

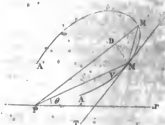
Longueur de la sous-normale. — En appelant N la longueur MY de la normale, le triangle rectangle MNP donne :

$$N = \sqrt{MP^2 + PM^2} = y \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

ou bien encore :

$$N = \frac{y}{dx} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{y \cdot ds}{dx}.$$

De la tangente à une courbe polaire.



La tangente MT, en un point M d'une courbe AA', rapportée à des coordonnées polaires, est entièrement déterminée par l'angle PMT, qu'elle fait avec le rayon vecteur du point de contact.

Cherchons à déterminer cet angle PMT que nous appellerons V.

A cet effet, considérons un point M' infiniment voisin de M; menons le rayon vecteur de M' et décrivons de P comme centre, avec PM pour rayon, un arc de cercle qui coupera PM en D et joignons MM', alors :

$$\text{angle } MPM' = d\theta, \quad M'D = dr, \quad \text{arc } MD = r \cdot d\theta.$$

Ceci posé, le point M' étant infiniment voisin de M, le triangle MM'D

peut être considéré comme rectiligne et rectangle, car dans le cercle chaque rayon est perpendiculaire à la courbe; remarquons en outre que dans ce triangle, l'angle $PM'M$ devient l'angle V , lorsqu'à la limite le point M' se confond avec le point M . Ce triangle rectangle $M'MD$ donne :

$$MD = M'D. \operatorname{tg} V.$$

d'où :

$$r, d\theta = dr \operatorname{tg} V.$$

et par suite :

$$\operatorname{tg} V = r \frac{d\theta}{dr}.$$

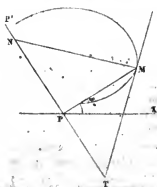
Remarque. — Pour un point dont la tangente est parallèle à l'axe polaire, on a :

$$V + \theta = n.\pi.$$

Pour un point dont la tangente est perpendiculaire à l'axe polaire, on a :

$$V + \theta = n. \frac{\pi}{2}.$$

De la sous-tangente et de la sous-normale à une courbe polaire.



Soient : PM le rayon vecteur d'un point M , d'une courbe rapportée à des coordonnées polaires, et MT et MN la tangente et la normale de ce point.

Au pôle P menons la perpendiculaire PP' sur le rayon vecteur : les longueurs TP et PN sont dites la *sous-tangente* et la *sous-normale* du point M .

Pour calculer ces distances, les triangles rectangles PMT et PMN donnent :

$$TP = PM. \operatorname{tg} V, \dots \text{ d'où } ST = r^2 \frac{d\theta}{dr},$$

$$NP = PM. \cot V, \dots \text{ d'où } SN = \frac{dr}{d\theta}.$$

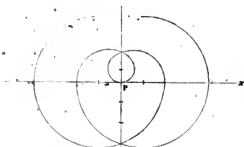
Longueurs de la tangente et de la normale.

Les longueurs de la tangente et de la normale sont les distances MT et MN; pour calculer ces longueurs, on a sur la figure :

$$T = \sqrt{\overline{TP}^2 + \overline{PM}^2} \dots\dots \text{ d'où } T = r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2}$$

$$N = \sqrt{\overline{NP}^2 + \overline{MP}^2} \dots\dots \text{ d'où } N = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2}.$$

APPLICATIONS.

Spirale d'Archimède.

Si l'on construit la courbe dont l'équation est $r = a\theta$, on obtient la courbe ci-dessus, laquelle est dite *spirale d'Archimède*.

Le rayon vecteur r est proportionnel à l'angle θ . La courbe est tangente à l'axe polaire au pôle.

L'équation $r = a\theta$, donne :

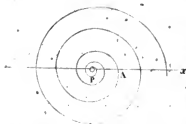
$$\frac{dr}{d\theta} \text{ ou } SN = a.$$

Donc : dans la spirale d'Archimède, la sous-normale est constante.

Cette courbe est la seule dans laquelle la sous-normale soit constante.

Spirale logarithmique.

En construisant la courbe dont l'équation est $r = a^{\theta}$, on obtient la courbe ci-dessous, laquelle est appelée *spirale logarithmique*.



Si a est > 1 , la courbe part de $PA = 1$ et s'ouvre de plus en plus pour des valeurs croissantes et positions de θ .

Pour des valeurs négatives de θ , r va indéfiniment en décroissant. Cette spirale s'approche donc indéfiniment du pôle sans jamais l'atteindre.

Si a est < 1 , on obtient pour les mêmes valeurs négatives de θ , et pour les valeurs positives, les mêmes valeurs obtenues pour r . C'est la même courbe située symétriquement par rapport à l'axe polaire.

En différentiant l'équation :

$$r = a^{\theta}$$

on trouve :

$$dr = a^{\theta} \cdot \log a \cdot d\theta = r \cdot \log a \cdot d\theta.$$

et par suite :

$$\operatorname{tg} V \text{ ou } \frac{r \cdot d\theta}{dr} = \frac{1}{\log a} = \text{constante.}$$

Donc : dans la spirale logarithmique, l'angle du rayon vecteur et de la tangente est constant.

La spirale logarithmique est la seule courbe qui jouisse de cette propriété.

CONCAVITÉ ET CONVEXITÉ DES COURBES.

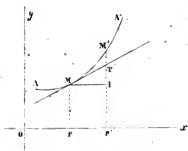
Points d'inflexion. — Points maximum. — Points minimum. — Points multiples. — Points de rebroussement et points isolés.

Une courbe est dite *convexe* par rapport à l'axe des x dans une de ses parties, lorsque dans cette partie, étant au-dessus de l'axe des x , elle est au-dessus de sa tangente. On dit alors qu'elle présente sa *convexité* à l'axe des x .

Une courbe est dite *concave* par rapport à l'axe des x dans une de ses parties, lorsque dans cette partie étant au-dessus de l'axe des x , elle se trouve au-dessous de sa tangente. On dit dans ce cas que la courbe présente sa *concavité* à l'axe des x .

Soit une courbe AA' , dont l'équation est $y = f(x)$.

Considérons deux points voisins M et M' de cette courbe. Soient x, y ; $x + \Delta x, y + \Delta y$ les coordonnées de ces points.



Alors :

$$MP = f(x), \quad M'P' = f(x + \Delta x).$$

La série de Taylor donne :

$$(1) \dots f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon].$$

ϵ étant l'ensemble des termes, autres que $f''(x)$ dans lesquels on a mis Δx^2 en facteur commun.

ϵ s'annule avec Δx .

Sur la figure, MT étant la tangente à la courbe au point M ;
TI = $\Delta x \cdot f'(x)$ en sorte que l'équation (1) devient :

$$M'P' = IP' + TI + \frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon].$$

d'où l'on tire :

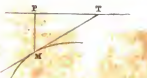
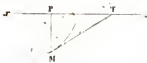
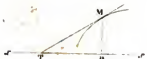
$$MT = \frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon].$$

C'est là l'expression de l'ordonnée MT de la courbe comptée à partir de la tangente, au-dessus si $\frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon]$ est positif; au-dessous dans le cas contraire.

ϵ devenant infiniment petit avec Δx , il en résulte que le signe de $f''(x) + \epsilon$ et par suite de $\frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon]$ dépend de $f''(x)$; ce signe est donc indépendant de Δx ; l'expression $\frac{\Delta x^2}{1.2} [f''(x) + \epsilon]$ reste donc la même, à droite et à gauche du point de tangence.

Par suite si $f''(x)$ est > 0 , la courbe est au-dessus de sa tangente; et si $f''(x)$ est < 0 , la courbe est au-dessous de sa tangente.

Donc :



De cette discussion résulte ce fait :

Une courbe est convexe ou concave vers l'axe des x , suivant que $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ou de signes contraires.



Les points d'inflexion ont donc pour abscisses, les racines de l'équation

$$f''(x) = 0.$$

Si l'on a :

$$f(x) > 0 \text{ et } f''(x) > 0,$$

la courbe est située au-dessus de l'axe des x et lui présente sa convexité.

Si l'on a :

$$f(x) > 0 \text{ et } f''(x) < 0,$$

la courbe est située au-dessus de l'axe des x et lui présente sa concavité.

Si l'on a :

$$f(x) < 0 \text{ et } f''(x) > 0,$$

la courbe est située au-dessous de l'axe des x et lui présente sa concavité.

Si l'on a :

$$f(x) < 0 \text{ et } f''(x) < 0,$$

la courbe est située au-dessous de l'axe des x et lui présente sa convexité.

Points d'inflexion. — Si la fonction $f''(x)$ passe du positif au négatif ou inversement, alors la courbe qui se trouvait au-dessus de sa tangente passe au-dessous ou inversement. On dit dans ce cas qu'il y a *inflexion* au point de tangence. Pour ce point $f''(x) = 0$.



Points maximum ou minimum.

Un point est dit *maximum*, lorsque son ordonnée est plus grande que les ordonnées des points infiniment voisins. Un point est dit *minimum*, lorsque son ordonnée est plus petite que les ordonnées des points infiniment voisins. On sait que pour ces points $f'(x) = 0$, c'est-à-dire que la tangente en ces points est parallèle à l'axe des x .

Sur la figure, M et M' sont des *points minimum* et N est un *point maximum*.

La courbe est concave au point maximum et convexe aux points minimum.

Points multiples. — Si deux branches d'une courbe se coupent en un point, ce point est *double*. S'il y a trois branches, ce point est *triple*. De tels points sont dits *points multiples*.



Points de rebroussement. — On nomme *point de rebroussement*, un point où deux branches d'une même courbe ont une tangente commune et s'arrêtent au point

de contact.

Point d'arrêt. — Ce point est celui où une branche de courbe s'arrête brusquement, il diffère du point de rebroussement en ce qu'au point d'arrêt il n'y a qu'une seule branche de courbe.

Points isolés. — Par points isolés, on entend des points dont les coordonnées satisfont à l'équation d'une courbe et qui ne se trouvent pas sur cette courbe.

DE QUELQUES COURBES SUR LESQUELLES ON APPLIQUE LES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

I. Construire la courbe dont l'équation est :

$$y^2 = x^3 - x^4.$$

Cette équation donne successivement :



$$y = \pm x \sqrt{x(1-x)},$$

$$2y \, dy = (3x^2 - 4x^3) \, dx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 4x^3}{2y} = \frac{3x - 4x^2}{2\sqrt{x(1-x)}} = f'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ ou } f''(x) = \frac{8x^2 - 12x + 3}{4(1-x)\sqrt{x(1-x)}}.$$

L'observation de l'équation de la courbe

$$y = \pm x \sqrt{x(1-x)}$$

établit que :

1° La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x (à cause du signe $\pm$ placé devant le second membre);

2° La courbe passe par l'origine;

3° Pour des valeurs négatives de x , y est constamment imaginaire; donc à gauche de l'axe des y , il n'y a aucun point de la courbe;

4° Pour des valeurs de $x < 1$, y est réel; au delà de $x = 1$, y ne cesse d'être imaginaire; donc si sur l'axe des x on prend $OA = 1$, il n'y a aucun point de la courbe au delà de la parallèle qq' menée à l'axe des y .

Quelle est la forme de la courbe à l'origine?

Pour $x = 0$, $\frac{dy}{dx}$ devient $\frac{0}{0}$; prenons donc les dérivées du numérateur et du dénominateur, nous aurons :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 8x}{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - 8x) \sqrt{x - x^2}}{1 - 2x}.$$

pour $x = 0$ $\lim \frac{(3 - 8x) \sqrt{x - x^2}}{1 - 2x} = 0.$

done la courbe est tangente à l'axe des x .

Donc puisqu'il y a 2 branches de courbes à l'origine, l'origine est un point de *rebroussement*.

Remarque sur un moyen simple de déterminer la tangente d'une courbe à l'origine, sans employer $\frac{dy}{dx}$.

L'équation de la tangente à l'origine est de la forme :

$$y = ax.$$

on en tire, pour la valeur de son coefficient angulaire a ,

$$a = \frac{y}{x}.$$

A l'origine : $x = 0$, $y = 0$; et par suite :

$$a = \lim \frac{y}{x}.$$

or à l'origine : l'élément de la courbe se confond avec l'élément rectiligne de la tangente ; donc le coefficient angulaire de la tangente à l'origine a pour expression $\lim \frac{y}{x}$, cette limite étant tirée de l'équation de la courbe.

Au lieu de chercher directement $\lim \frac{y}{x}$, on pourra, suivant l'équation et si cela est plus facile, déterminer $\lim \frac{y^2}{x^2}$, $\lim \frac{y^3}{x^3}$, etc., pour en déduire $\lim \frac{y}{x}$.

Ainsi dans la courbe qui nous occupe, il nous a fallu prendre $\frac{dy}{dx}$, puis les dérivées du numérateur et du dénominateur de cette expression; tandis que, en appliquant la remarque que nous venons de faire, sur l'équation de la courbe :

$$y^2 = x^2 - x^4.$$

on a tout de suite :

$$\frac{y^2}{x^2} = 1 - x^2.$$

et pour $x = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{x^2} = 0, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = 0.$$

La tangente à l'origine se confond donc avec l'axe des x .

Quelle est la forme de la courbe au point A?

Dans :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-4x)x}{2\sqrt{x(1-x)}},$$

faisons $x = 1$ (abscisse de A), il vient :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{0} = \infty.$$

Donc la parallèle qq' , menée à l'axe des y , est tangente à la courbe.

Recherche des points maximums ou minimums.

Pour ces points $\frac{dy}{dx} = 0$,

il faut donc que l'on ait :

$$\frac{(3-4x)x}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0,$$

$$\text{d'où } x = 0, \quad 3-4x = 0, \quad x = \frac{3}{4}.$$

La valeur $x = 0$, nous apprend que la courbe est tangente à l'origine.

La substitution de $\frac{3}{4}$ à la place de x , dans $\frac{d^2y}{dx^2}$ donne :

$$\frac{8 \cdot \frac{9}{16} - 9 + 3}{4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}} = \frac{-24}{4\sqrt{3}} < 0.$$

Donc les points ayant pour coordonnées :

$$x = \frac{3}{4}, y = \pm \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{16}} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{16},$$

sont des points maximums.

Recherche des points d'inflexion.

Pour ces points $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$,

il faut donc que l'on ait :

$$\frac{8x^2 - 12x + 3}{2\sqrt{x(1-x)}} = 0,$$

d'où

$$8x^2 - 12x + 3 = 0.$$

et en résolvant :

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{16} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}.$$

La première valeur $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ étant > 1 , doit être rejetée : donc pour l'abscisse $x = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ laquelle est positive et moindre que 1, il y a point d'inflexion.

La courbe a donc la forme indiquée sur la figure.

Aire de la courbe. — D'après le principe $dA = ydx$, l'aire de la courbe sera donnée par l'intégrale

$$A = \int ydx.$$

et, puisque la courbe est comprise entre les abscisses 0 et 1, il en résulte que l'aire totale sera donnée par le double de l'intégrale définie :

$$2. \int_0^1 ydx.$$

car la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x .

On a donc pour l'aire totale A de cette courbe

$$A = 2. \int_0^1 ydy.$$

Or : $y = x. \sqrt{x - x^2}$, donc :

$$A = 2. \int_0^1 x \sqrt{x - x^2} dx.$$

mais on a trouvé (intég. n° V, page 179) :

$$\int x\sqrt{x-x^2} dx = \frac{8x^2-2x-3}{24}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{16}\arcsin(2x-1) + C.$$

Pour $x = 0$, cette intégrale indéfinie devient :

$$\frac{1}{16}\arcsin(-1) + C = -\frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{2} + C.$$

Pour $x = 1$, cette intégrale indéfinie devient :

$$\frac{1}{16}\arcsin 1 + C = \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{2} + C,$$

d'où en faisant la différence :

$$\int_0^1 x\sqrt{x-x^2} dx = \frac{1}{16}\pi.$$

Donc :

$$A = \frac{\pi}{8}.$$

Remarque. — Si l'on considère le cercle dont l'équation est $y^2 + x^2 - x = 0$, laquelle peut s'écrire ainsi :

$$y^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

ce cercle a pour rayon $\frac{1}{2}$ et pour centre le point $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$; sa

surface est donc $\frac{\pi}{4}$.

donc : l'aire de la courbe considérée, est la moitié de celle du cercle décrit sur OA comme diamètre.

II. Construire la courbe dont l'équation est :

$$y^2 = 2x^2y + x^4 + x^5.$$

Cette équation, résolue par rapport à y et différenciée deux fois, donne en appelant y' et y'' les deux valeurs obtenues pour y :

partir du diamètre parabolique OA , est sans cesse réel et va constamment en croissant.

La courbe se compose donc de deux branches infinies lesquelles partent de l'origine.

L'origine est donc un point double.

L'ordonnée des points situés au-dessus du diamètre OA a pour expression $y' = x^2 + x^2 \sqrt{x}$, et l'ordonnée des points situés au-dessous de ce diamètre a pour expression $y'' = x^2 - x^2 \sqrt{x}$.

Quelle est la forme de la courbe à l'origine ?

Pour $x = 0$, les coefficients angulaires $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy''}{dx}$ sont nuls, donc à l'origine les deux branches de la courbe sont tangentes à l'axe des x .

Puisque la courbe ne s'étend pas du côté des x négatifs, il en résulte que l'origine est un point de rebroussement.

Recherche des points de rencontre de la courbe avec l'axe des x .

Ces points sont donnés par la résolution des équations :

$$\begin{aligned} y &= 0, & y &= 0, \\ y &= x^2 + x^2 \sqrt{x}, & y &= x^2 - x^2 \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Ces couples d'équations donnent la solution commune $x = 0$, $y = 0$, c'est-à-dire l'origine; le second système d'équations donne, en outre, le point $y = 0$, $x = 1$; donc si sur l'axe des x , on prend $OB = 1$, on a en B le point de rencontre de l'axe des x avec la branche de courbe située au-dessous du diamètre OA .

Forme de la courbe en B.

Pour $x = 1$, le coefficient angulaire $\frac{dy''}{dx}$ devient :

$$\frac{4 - 5}{2} = -\frac{1}{2}.$$

donc : si l'on mène en B la droite UU' telle que

$$\text{tg } UBx = -\frac{1}{2}.$$

on a en UU' la tangente de la courbe au point B. ●

Recherche des points maximums et minimums.

Pour ces points $\frac{dy}{dx} = 0$, nous aurons donc, pour les deux branches, les équations :

$$4x + 5x\sqrt{x} = 0. \quad 4x - 5x\sqrt{x} = 0.$$

La première comme la seconde de ces équations donne $x = 0$; nous connaissons ce résultat;

La seconde équation admet, en outre, la racine :

$$\frac{16}{25} = 0,64.$$

La substitution de ce nombre dans $\frac{d^2y}{dx^2}$ donne :

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$

Donc l'abscisse $x = \frac{16}{25} = 0,64$ donne un point maximum situé sur la branche de courbe placée au-dessous du diamètre OA.

Les coordonnées de ce point M sont :

$$x = 0,64$$

$$y'' = \frac{256}{3125} = 0,08.$$

L'équation $4 + 5\sqrt{x} = 0$ n'admet pas de racine réelle, il n'y a donc ni point maximum ni point minimum sur la branche de courbe située au-dessus du diamètre OA.

Recherche des points d'inflexion.

Pour ces points, on a $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, nous aurons donc, pour les deux branches, les deux équations :

$$8 + 15\sqrt{x} = 0. \quad 8 - 15\sqrt{x} = 0.$$

La première de ces équations n'admet pas de racine réelle, donc il n'y a pas de points d'inflexion sur la branche de courbe placée au-dessus du diamètre OA.

La seconde équation donne :

$$x = \frac{64}{225} = 0,28.$$

L'ordonnée de ce point N est $y'' = \left(\frac{64}{225}\right)^2 \left(1 - \frac{8}{15}\right) = 0,03$.

Remarque sur la branche de courbe située au-dessous du diamètre.

L'ordonnée de cette branche, comptée à partir de l'axe des x , a pour expression :

$$y'' = x^2 (1 - \sqrt{x}).$$

Pour toute valeur de $x < 1$, y'' est positive, et pour des valeurs de $x > 1$; y'' ne cesse d'être négative, donc du point 0 au point B; cette branche de courbe est au-dessus de l'axe des x , en B, elle rencontre l'axe des x ; à partir de B, elle passe au-dessous de l'axe des x .

La discussion des signes des coefficients $\frac{dy'}{dx}$ et $\frac{dy''}{dx}$, jointe à tout ce que nous venons de dire, établit la forme de la courbe.

Remarque. — L'angle UBx étant obtus, on est sûr que la courbe ON MB ne coupe pas la perpendiculaire élevée en B sur l'axe des x en un autre point que le point B.

Cette remarque est utile pour la détermination de l'aire de la courbe.

Aire de la courbe.

Cherchons l'aire de la courbe comprise entre les limites 0 et 1, on voit évidemment sur la figure que y' et y'' étant les ordonnées des deux branches OA' et OB, correspondantes à une même abscisse, on a :

A étant l'aire cherchée :

$$(1) \quad A = \int_0^1 y' dx - \int_0^1 y'' dx.$$

Or :

$$y' = x^2 + x^2 \sqrt{x}, \quad y'' = x^2 - x^2 \sqrt{x}.$$

d'où :

$$\int y' dx = \int \left(x^2 dx + x^{\frac{5}{2}} dx \right) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + C.$$

$$\int y' dx = \int (x^2 dx - x^{\frac{5}{2}} dx) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C.$$

Pour $x = 0$; ces deux intégrales se réduisent aux constantes, lesquelles sont évidemment nulles.

Pour $x = 1$; ces deux intégrales deviennent :

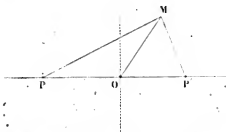
$$\frac{1}{3} - \frac{2}{7} \text{ et } \frac{1}{3} - \frac{2}{7}.$$

donc :

$$\int_0^1 y' dx - \int_0^1 y' dx \text{ ou } A = \frac{4}{7}.$$

Telle est l'expression de l'aire de la courbe.

III. Déterminer le lieu des points tels, que le produit de leurs distances à deux points fixes, soit constant et égal au carré de la ligne qui joint ces deux points fixes.



Soient P, P' les deux points fixes, et soit O le milieu de la ligne qui joint ces deux points.

Soit M un point du lieu cherché, alors en appelant $2a$ la ligne PP', nous devons avoir :

$$MP \cdot MP' = a^2.$$

Prenons PP' pour axe polaire et O pour pôle; les coordonnées polaires du point M sont :

$$OM = r, \text{ angle } MOP = \theta.$$

Les triangles MOP, MOP' donnent :

$$MP^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cdot \cos \theta;$$

$$MP'^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cdot \cos \theta.$$

La courbe est donc en M, perpendiculaire à l'axe PP'; de même en M'.

En 0, $\theta = 45^\circ$, et $\lg V$ devient zéro, donc $V = 0$.

Donc en 0 la courbe est tangente à l'axe PP'.

Le rayon vecteur OM est évidemment le plus grand de tous les rayons vecteurs de la courbe.

Recherche des points maximum ou minimum.

Nous allons ici chercher les points compris dans l'angle AOr pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe polaire.

Pour ces points on doit avoir :

$$V + \theta = 180^\circ.$$

Or l'équation de la courbe donne :

$$\lg V = -\cot 2\theta.$$

ou bien :

$$\lg V = -\lg (90^\circ - 2\theta)$$

et par suite :

$$V + 90^\circ - 2\theta = 180^\circ.$$

mais

$$V + \theta = 180^\circ.$$

donc par soustraction on a :

$$3\theta = 90^\circ,$$

d'où :

$$\theta = 30^\circ.$$

Pour $\theta = 30^\circ$, $r^2 = 2a^2 \cos 60^\circ = r^2$, d'où $r = a$.

si donc l'on fait l'angle $\angle ON = 30^\circ$ et si l'on rabat P en N suivant l'arc NP de centre 0, on a en N, un point de la courbe dont la tangente est la parallèle bb' menée à l'axe polaire.

La courbe proposée a donc la forme indiquée sur la figure.

Cette courbe est appelée *lemniscate*.

Aire de la courbe. — L'aire de la courbe se compose évidemment de quatre fois l'aire comprise entre l'arc ONM et l'axe OM, les limites angulaires de cet arc sont 0° et 45° , et puisqu'en coordonnées polaires

$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, l'aire totale A de la courbe sera donnée par l'expression :

$$A = 4 \int_0^{45^\circ} \frac{1}{2} r^2 d\theta. \quad (1)$$

Puisque $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$ on a :

$$\int \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int a^2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} a^2 \sin 2\theta + C.$$

Pour $\theta = 0$, cette intégrale devient C, C est évidemment nulle.

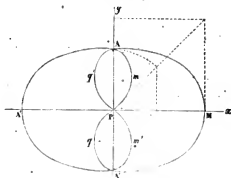
Pour $\theta = 45^\circ$, cette intégrale devient $\frac{1}{2} a^2$.

On a donc pour l'aire totale de la courbe :

$$A = 2a^2.$$

IV. Construire la courbe dont l'équation est

$$r = a \cdot \sin \frac{\theta}{2}.$$



L'équation différentiée donne :

$$\lg V = \frac{r \cdot d\theta}{dr} = 2 \lg \frac{r}{2}.$$

Pour $\theta = 0$, $r = 0$; le pôle P est donc un point de la courbe.

Si l'on donne à θ des valeurs croissantes de 0 à 90° , r croît de 0 à $\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = PA$; donc P étant le pôle et Pr l'axe polaire, on a dans le quadrant yPr la branche de courbe PmA.

De $\theta = 90^\circ$ à $\theta = 180^\circ$, r croît de $\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}$ à a , et l'on obtient dans le quadrant yPz la branche AA'.

Si l'on fait croître θ de 180° à 360° , le rayon r reprend dans l'ordre inverse les mêmes valeurs qu'il a prises de 0 à 180° ; on trouve ainsi les deux branches $A'A''$ et $A''m'P$.

De 360° à 2.360° ou 720° , le rayon vecteur r repasse absolument par les mêmes valeurs que de 0 à 360° , seulement ces valeurs sont négatives. Dans l'intervalle de 390° à 720° on trouve donc les quatre Branches PqA'' , $A''M$, $Pq'A$ et AM .

Les points A , A'' et P sont donc multiples.

Forme de la courbe aux points A , M .

En A' ($\theta = 180^\circ$) $\operatorname{tg} V = 2 \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$, $V = \infty$; en M ($\theta = 360^\circ + 180^\circ$)
 $\operatorname{tg} V = 2 \operatorname{tg} (180^\circ + 90^\circ) = 2 \operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

donc en A' et en M , la courbe est perpendiculaire à l'axe polaire.

Forme de la courbe au pôle.

Au pôle $\theta = 0$, $\operatorname{tg} V = 0$, $V = 0$, donc au pôle la courbe est tangente à l'axe polaire.

Aire de la boucle $PmAq'P$.

L'aire A de la boucle $PmAq'P$, est donnée par l'expression :

$$A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

On a successivement :

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} r^2 d\theta &= \frac{1}{2} a^2 \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta = a^2 \int \sin^2 \frac{1}{2} \theta d\frac{\theta}{2} = \\ &= -a^2 \int \sin \frac{1}{2} \theta d \cos \frac{\theta}{2} = -a^2 \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{1}{2} \theta + a^2 \int \cos^2 \frac{1}{2} \theta d\frac{\theta}{2} = \\ &= -a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + a^2 \int (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}) d\frac{\theta}{2} = \\ &= -a^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + a^2 \int d\frac{\theta}{2} - a^2 \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

En faisant passer $-a^2 \int \sin^2 \frac{\theta}{2} d\frac{\theta}{2}$ dans le premier membre et divisant par 2, il vient

$$\int \frac{1}{2} r^2 d\theta = -\frac{a^2}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{a^2 \theta}{4} + C.$$

Pour $\theta = 0$, cette intégrale devient C , et la constante C est évidemment nulle.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette intégrale devient : $\frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$,
donc :

$$A = \frac{a^2}{4} (\pi - 1).$$

DES TROIS COURBES REPRÉSENTÉES PAR L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU
DEUXIÈME DEGRÉ À DEUX VARIABLES ET SIMPLIFICATION
DE CETTE ÉQUATION.

Soit l'équation générale du deuxième degré à deux variables :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

résolue par rapport à y ; cette équation donne :

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ae)x + d^2 - 4af}.$$

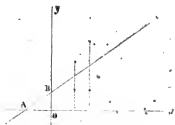
on plus simplement en posant :

$$-\frac{b}{2a} = k, \quad -\frac{d}{2a} = h, \quad bd - 2ae = p, \quad d^2 - 4af = q.$$

$$(1) \dots y = kx + h \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2px + q}.$$

Cette équation montre que si l'on construit la droite AB dont l'équation est :

$$y = kx + h$$



pour obtenir les points de la courbe, correspondants aux diverses valeurs de l'abscisse x , il faudra *augmenter* et *diminuer* les ordonnées de la droite, correspondantes à ces valeurs de l'abscisse, des quantités provenant des résultats de la substitution de ces mêmes valeurs de l'abscisse, dans la fonction :

$$\frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2px + q}.$$

La droite AB divise donc en parties égales, une série de cordes parallèles de la courbe dont l'équation est (1), pour cette raison, on dit que AB est un diamètre de la courbe.

De plus, on voit que dans la courbe de l'équation (1) la fonction

$$\pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2px + q}$$

représente l'ordonnée de la courbe, comptée à partir du diamètre AB, dont l'équation est $y = kx + h$.

Appelons Y cette ordonnée comptée à partir de la droite AB, alors :

$$Y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2px + q}.$$

Les valeurs de l'abscisse x étant indéterminées et pouvant croître positivement et négativement de 0 à l'infini, on voit que sous le radical de Y, on pourra toujours donner à x une valeur assez grande pour que le signe de la fonction

$$(b^2 - 4ac)x^2 + 2px + q$$

soit celui de son premier terme, et puisque x^2 est positif, il en résulte que le signe de cette fonction dépend de $b^2 - 4ac$.

Y sera donc réel ou imaginaire suivant le signe de $b^2 - 4ac$.

Examinons donc les trois hypothèses suivantes :

$$b^2 - 4ac < 0, \quad b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 - 4ac = 0.$$

1^{re} cas. $b^2 - 4ac < 0$. Si $b^2 - 4ac$ est négatif, soit $b^2 - 4ac = -f^2$, alors :

$$Y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{-f^2x^2 + 2px + q}.$$

Pour des valeurs convenables, positives ou négatives de x , le radical pourra être réel; mais on conçoit que, à partir d'une certaine valeur positive, comme pour une valeur négative et suffisamment grande, prise pour x , le signe de la fonction :

$$-f^2x^2 + 2px + q$$

sera celui de son premier terme, c'est-à-dire que la fonction sera négative et qu'à partir de ces deux valeurs de x , Y ne cessera d'être imaginaire.

Donc, au delà de ces deux valeurs, il n'y aura aucun point de la courbe.

Donc, dans ce cas, la courbe est limitée dans le sens des x positifs et dans le sens des x négatifs.

Il est aisé de voir que dans ce cas la fonction

$$-f^2x^2 + 2px + q$$

est susceptible de maximum, car ici :

$$f(x) = -f^2x^2 + 2px + q,$$

$$f'(x) = -2f^2x + 2p,$$

$$f''(x) = -2f^2 < 0.$$

Le maximum de Y correspond donc à l'abscisse $x = \frac{p}{f^2}$. La courbe est donc limitée au-dessus et au-dessous du diamètre AB.

Donc : *alors que $b^2 - 4ac$ est < 0 , l'équation générale du deuxième degré à deux variables, représente une courbe limitée dans tous les sens.*

Variétés de cette courbe.

Mettons f^2 en facteur commun sous le radical, puis complétons le carré, nous aurons :

$$Y = \pm \frac{f}{2a} \sqrt{-\left(x - \frac{p}{f^2}\right)^2 + \frac{p^2}{f^4} + \frac{q}{f^2}}.$$

sous cette forme, on voit que si

$$\frac{p^2}{f^4} + \frac{q}{f^2}$$

est négatif, toute valeur de x rendra Y imaginaire; on dit, dans ce cas, que l'équation (1) représente un lieu imaginaire.

Enfin, si

$$\frac{p^2}{f^4} + \frac{q}{f^2} = 0$$

Y devient

$$Y = \pm \frac{f}{2a} \sqrt{-\left(x - \frac{p}{f^2}\right)^2}.$$

Sous cette forme, on voit que Y ne pourra avoir qu'une seule valeur réelle, laquelle est zéro et correspond à

$$x = \frac{p}{f^2}.$$

La courbe se réduit donc à un seul point, lequel est sur la droite AB; puisque $Y = 0$.

2^e cas. $b^2 - 4ac > 0$. Si $b^2 - 4ac$ est positif, soit $b^2 - 4ac = d^2$, alors :

$$Y = \pm \frac{1}{2d} \sqrt{d^2 x^2 + 2px + q}.$$

On conçoit que, à partir d'une valeur positive, comme à partir d'une valeur négative de x , suffisamment grande, la fonction

$$d^2 x^2 + 2px + q \dots \dots (1)$$

sera constamment du signe de son premier terme, c'est-à-dire sera positive; de plus, cette fonction étant entière et sa dérivée étant

$$f'(x) = 2d^2 x + 2p.$$

Comme on pourra toujours prendre pour x une valeur qui rende cette fonction dérivée, positive, il en résulte que la fonction (1) ira toujours en croissant à partir de cette valeur de x ; donc, ici la courbe de l'équation (1) s'étend indéfiniment dans le sens des x positifs et dans le sens des x négatifs.

Elle est donc illimitée dans tous les sens.

Si les racines de l'équation

$$d^2 x^2 + 2px + q = 0$$

sont réelles, alors pour ces racines : $Y = 0$, c'est dire que la courbe rencontre en deux points son diamètre AB.

Si les racines de cette équation sont imaginaires, la courbe ne rencontre pas son diamètre AB, et, dans ce cas, l'ordonnée Y est susceptible d'un minimum; car ici :

$$f(x) = d^2 x^2 + 2px + q,$$

$$f'(x) = 2d^2 x + 2p,$$

$$f''(x) = 2d^2 > 0.$$

Le minimum de Y correspond à l'abscisse

$$x = -\frac{p}{d^2}.$$

Donc, alors que $b^2 - 4ac > 0$, l'équation générale du deuxième degré représente une courbe illimitée dans tous les sens, laquelle peut rencontrer

son diamètre en deux points ou si elle ne le rencontre pas, elle a deux points minimum au-dessus et au-dessous de ce diamètre.

Variétés de cette courbe.

Mettons δ^2 en facteur commun sous le radical, puis complétons le carré, nous aurons :

$$Y = \pm \frac{\delta}{2a} \sqrt{\left(x + \frac{p}{\delta^2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{\delta^4}}.$$

Si l'on a :

$$q - \frac{p^2}{\delta^4} = 0,$$

il vient :

$$Y = \pm \frac{\delta}{2a} \left(x + \frac{p}{\delta^2}\right),$$

et, par suite :

$$y = kx + h + \frac{\delta}{2a} \left(x + \frac{p}{\delta^2}\right).$$

L'équation générale du deuxième degré donne donc, dans ce cas, en séparant les signes :

$$y = \left(k + \frac{\delta}{2a}\right)x + h + \frac{p}{2a\delta},$$

$$y = \left(k - \frac{\delta}{2a}\right)x + h - \frac{p}{2a\delta}.$$

Ce sont là les équations de deux lignes droites non parallèles, puisque leurs coefficients angulaires sont différents.

• L'équation du second degré représente donc, dans ce cas, un système de deux droites qui se coupent.

3^e cas. $b^2 - 4ac = 0$. La différence $b^2 - 4ac$ étant nulle, on a :

$$Y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{2px + q}.$$

L'inspection de la fonction

$$2px + q$$

montre qu'elle pourra toujours être annulée, donc, dans ce cas, la courbe rencontre toujours le diamètre AB, en un seul point, car l'équation $2px + q = 0$ est du premier degré.

De plus, quels que soient les signes de p et de q , on pourra toujours trouver pour x une valeur positive ou négative assez grande pour rendre la fonction

$$2px + q$$

constamment positive et croissante à partir de cette valeur de x . — On pourra toujours aussi trouver pour x une valeur négative ou positive qui rendra la fonction

$$2px + q$$

constamment négative à partir de cette valeur, alors Y , de réel qu'il était, deviendra constamment imaginaire.

Ici l'équation générale du deuxième degré représente donc une courbe illimitée dans un sens, limitée dans l'autre, et qui rencontre son diamètre en un seul point.

Variétés de cette courbe.

Si $p = 0$, on a :

$$Y = \pm \frac{1}{2a} \sqrt{q}.$$

L'ordonnée Y étant constante, la courbe se réduit ici à deux droites parallèles au diamètre à partir duquel on compte l'ordonnée Y .

Si q était nul, ces deux droites se confondraient avec le diamètre; enfin, si q est négatif, les deux parallèles seraient imaginaires.

Remarque. — Pour construire une courbe du deuxième degré, il faudra, avant d'en discuter l'équation, mettre cette équation sous la forme

$$yx = k + h \pm \frac{f}{2a} \sqrt{\pm (x-a)^2 + c}.$$

Construction de courbes du deuxième degré.

1. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 3x + 7 = 0 \dots (1).$$

Ici $b^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$, la courbe est donc fermée dans tous les sens.

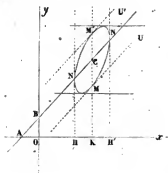
L'équation proposée, résolue par rapport à y , donne successivement :

$$y = x + 1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 2x^2 + 3x - 7},$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 5x - 6}.$$

Et en complétant le carré sous le radical :

$$y = x + 1 \pm \sqrt{-\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$



Mise sous cette forme, on voit que la droite AB ($y = x + 1$); est un diamètre de la courbe; l'ordonnée Y, comptée à partir de ce diamètre, a pour valeur :

$$Y = \pm \sqrt{-\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}$$

Posons $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = x'^2$, d'où

$$x = \frac{5}{2} \pm x'; \text{ alors, si l'on prend}$$

$OK = \frac{5}{2}$, les valeurs de x' devront

être comptées à droite et à gauche du point K et Y devient par substitution :

$$Y = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x'^2}$$

Le maximum de Y correspond à $x' = 0$, ce maximum est $\frac{1}{2}$; si donc l'on mène la parallèle KC à l'axe des x , et, si, à partir de C, on prend $CM = CM' = \frac{1}{2}$, la courbe sera comprise entre les parallèles M'U' et MU et passera en M et en M'.

Pour des valeurs de $x' < \frac{1}{2}$, Y ne cesse d'être réelle, pour $x' = \frac{1}{2}$, $Y = 0$ et au delà de $x' = \frac{1}{2}$, Y devient imaginaire et ne cesse de l'être.

Si donc l'on prend $KH = KH' = \frac{1}{2}$, et, si, par les points H et H', on mène les parallèles HN, H'N' à l'axe des y , les points N et N' appartiennent à la courbe et cette courbe est comprise entre les parallèles HN et H'N'.

On a donc une idée première de la forme de la courbe.

On achèvera la détermination complète de la courbe par la recherche des points maximums et minimums et de quelques points particuliers.

La différentiation de l'équation (1) donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 4x + 3}{2y - 2x - 2} = 1 \mp \frac{x - \frac{5}{2}}{1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}} = f'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{1}{4 \left[\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 \right] \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}} = f''(x).$$

Les coordonnées des points maximums et minimums seront données par la résolution des équations :

$$\begin{aligned} y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 3x + 7 &= 0, \\ 2y - 4x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination de y entre ces équations donne l'équation suivante :

$$2x^2 - 10x + \frac{49}{4} = 0,$$

laquelle a pour racines les abscisses des points maximums ou minimums. Les deux racines de cette équation sont :

$$x_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}}, \quad x_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}}.$$

Remarquons ici que les signes $+$ et $-$ du radical $\sqrt{\frac{1}{8}}$ correspondent respectivement aux signes $-$ et $+$ de $f''(x)$.

On a donc par substitution :

$$f''(x_1) < 0; \quad f''(x_2) > 0,$$

par suite :

$$x_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{8}} \text{ est l'abscisse d'un point maximum,}$$

$$x_2 = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{8}} \text{ est l'abscisse d'un point minimum.}$$

Les coordonnées des points de la courbe, pour lesquels la tangente est perpendiculaire à l'axe des x , sont données par la résolution des équations :

$$\begin{aligned} y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 3x + 7 &= 0, \\ y - x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées de ces points sont :

$$\begin{array}{ll} x = 2, & x_1 = 3, \\ y = 3, & y = 4. \end{array}$$

Ce sont les points N et N'.

La courbe a donc la forme indiquée sur la figure.

Aire de la courbe. — Si l'on désigne par A l'aire totale de la courbe et si l'on appelle y' l'ordonnée $x + 1 + \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}$ de l'arc N'M'N, et y'' l'ordonnée $x + 1 - \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2}$ de l'arc N'MN ; on a, en remarquant que les points extrêmes N et N' répondent aux abscisses 2 et 3 :

$$A = \int_2^3 y' dx - \int_2^3 y'' dx, \dots (1).$$

Calculons $\int y' dx$, nous aurons successivement :

$$\begin{aligned} \int y' dx &= \int x dx + \int dx + \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} + x + \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} dx, \dots (2). \end{aligned}$$

afin de calculer $\int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} dx$, nous remarquerons que $x - \frac{5}{2}$ doit être moindre que $\frac{1}{2}$ et nous poserons :

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \sin \phi,$$

d'où :

$$dx = \frac{1}{2} \cos \phi \, d\phi,$$

par suite :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} dx &= \int \frac{1}{2} \cos \phi \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \sin^2 \phi} \, d\phi = \\ &= \frac{1}{4} \int \cos^2 \phi \, d\phi. \end{aligned}$$

Mais on a trouvé (intég. n° III, page 169) :

$$\int \cos^2 z \, dz = \frac{1}{2} \sin z \cos z + \frac{z}{2} + C,$$

donc :

$$\int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} \, dx = \frac{1}{8} \sin z \cos z + \frac{z}{8} + C,$$

et puisque $\sin z = 2x - 5$, $\cos z = \sqrt{1 - (2x - 5)^2}$,

$$z = \arcsin (2x - 5),$$

on a :

$$\int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2} \, dx = \frac{1}{8} (2x - 5) \sqrt{1 - (2x - 5)^2} + \frac{1}{8} \arcsin (2x - 5).$$

L'équation (2) devient donc par substitution :

$$\int y' dx = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{8} \arcsin (2x - 5) + \frac{1}{8} (2x - 5) \sqrt{1 - (2x - 5)^2} + C.$$

On a de même :

$$\int y'' dx = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{8} \arcsin (2x - 5) - \frac{1}{8} (2x - 5) \sqrt{1 - (2x - 5)^2} + C.$$

Par suite :

$$\int_2^3 y' dx = \frac{7}{2} + \frac{1}{8} [\arcsin 1 - \arcsin (-1)] = \frac{7}{2} + \frac{1}{4} \pi.$$

$$\int_2^3 y'' dx = \frac{7}{2} - \frac{1}{8} [\arcsin 1 - \arcsin (-1)] = \frac{7}{2} - \frac{1}{4} \pi.$$

et enfin :

$$A = \frac{\pi}{2}.$$

II. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$y^2 - 2xy - x^2 + x = 0.$$

Ici $b^2 - 4ac = 4 > 0$. La courbe est donc une hyperbole ou une variété de cette courbe.

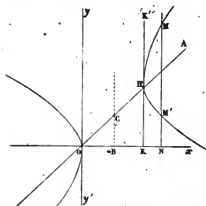
La courbe passe par l'origine puisque le système $x = 0$, $y = 0$ satisfait à son équation.

L'équation résolue par rapport à y donne successivement, en com-

plétant le carré sous le radical :

$$y = x \pm \sqrt{2x^2 - x}.$$

$$y = x \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$



La droite OA, $y = x$ est un diamètre de la courbe et l'ordonnée Y comptée à partir de ce diamètre a pour valeur :

$$Y = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}}.$$

ou bien, si l'on pose $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x'^2$,

$$Y = \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{x'^2 - \frac{1}{16}}.$$

Si donc l'on prend $OB = \frac{1}{4}$, les valeurs de x' devront être portées à droite et à gauche du point B, car l'équation $\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = x'^2$ donne $x = \frac{1}{4} \pm x'$.

Pour toute valeur de x' moindre que $\frac{1}{4}$, Y est imaginaire, pour $x' = \frac{1}{4}$, $Y=0$, et toute valeur de $x' > \frac{1}{4}$ et croissante, rend Y réel et croissant; pour $x' = \infty$, $Y = \pm \infty$.

Donc si l'on prend $BK = \frac{1}{4}$, il n'y aura aucun point de la courbe compris entre les parallèles yy' et KK' ; les points O et H appartiennent

à la courbe et à partir de 0 et de H, les deux branches dont se compose la courbe cherchée, s'étendent vers l'infini dans les deux sens.

Recherche des points maximums et minimums.

L'équation différenciée donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y + 2x - 1}{2(y - x)} = 1 \pm \frac{\sqrt{2} \left(x - \frac{1}{4} \right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{\sqrt{2}}{16 \left[\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16} \right] \cdot \sqrt{\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}}}$$

Les coordonnées des points maximums ou minimums sont données par la résolution des équations :

$$2y + 2x - 1 = 0.$$

$$y^2 - 2xy - x^2 + x = 0.$$

L'élimination de y donne l'équation

$$2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0.$$

laquelle a pour racines les abscisses des points maximums ou minimums. Les racines de cette équation sont imaginaires, il n'y a donc ni points maximums ni points minimums sur la courbe.

Aux points 0 et H, la tangente est perpendiculaire à l'axe des x .

Aire de la courbe.

L'équation de la courbe est :

$$y = x \pm \sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(x - \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{1}{16}}$$

Si l'on appelle y' et y'' , les deux ordonnées correspondantes aux signes + et -, on aura pour l'aire A du segment HMM' compris entre l'abscisse $x = Ok = \frac{1}{2}$ et l'abscisse indéterminée ON.

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^x y' dx - \int_{\frac{1}{2}}^x y'' dx \dots\dots (u)$$

Calculons chacune des intégrales indéfinies $\int y' dx$, $\int y'' dx$. On a :

$$\int y' dx = \int dx + \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} dx.$$

$$\int y' dx = x + \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} dx \dots\dots (2)$$

il s'agit de calculer

$$\int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} dx.$$

Remarquons ici que $x - \frac{1}{4}$ doit être plus grand que $\frac{1}{4}$, nous poserons donc :

$$x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \sec \varphi.$$

d'où en différentiant :

$$dx = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi$$

par suite :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} dx &= \int \sqrt{\frac{1}{16} \sec^2 \varphi - \frac{1}{16}} \cdot \frac{1}{4} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{16} \int \sqrt{\sec^2 \varphi - 1} \cdot \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{16} \int \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot \sec \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{(1 - \cos^2 \varphi)}{\cos^3 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} - \frac{1}{16} \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

Or on a trouvé (intég. n° XIII, page 173 et intég. n° IX, page 172) :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{séc} \varphi - \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right).$$

donc :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cdot dx &= \frac{1}{32} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{séc} \varphi - \frac{3}{32} \log \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) + C = \\ &= \frac{1}{32} \operatorname{tg} \varphi \operatorname{séc} \varphi - \frac{3}{32} \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}) + C. \end{aligned}$$

Et puisque $\operatorname{séc} \varphi = 4x - 1$, $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\operatorname{séc}^2 \varphi - 1} = \sqrt{(4x - 1)^2 - 1}$;
il vient :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}} \cdot dx &= \frac{1}{32} (4x - 1) \sqrt{(4x - 1)^2 - 1} - \\ &- \frac{3}{32} \log [4x - 1 + \sqrt{(4x - 1)^2 - 1}] + C. \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int y' dx &= x + \sqrt{2} \cdot \left[\right. \\ &\left. \left[\frac{1}{32} (4x - 1) \sqrt{(4x - 1)^2 - 1} - \frac{3}{32} \log (4x - 1 + \sqrt{(4x - 1)^2 - 1}) \right] \right] + C. \end{aligned}$$

on a de même :

$$\begin{aligned} \int y'' dx &= x - \sqrt{2} \cdot \left[\right. \\ &\left. \left[\frac{1}{32} (4x - 1) \sqrt{(4x - 1)^2 - 1} - \frac{3}{32} \log (4x - 1 + \sqrt{(4x - 1)^2 - 1}) \right] \right] + C. \end{aligned}$$

De ces deux intégrales on déduira aisément l'aire A.

III. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$xy - x^2 - y - 1 = 0.$$

Ici $b^2 - 4ac = 1 > 0$. La courbe cherchée est donc illimitée dans les deux sens.

L'équation résolue par rapport à y , donne :

$$y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$



et en effectuant la division

$$y = x + 1 + \frac{2}{x-1}.$$

Soit AB la droite $y = x + 1$:
alors en posant

$$Y = \frac{2}{x-1}.$$

Y est l'ordonnée comptée à partir de la droite AB : au-dessus si Y est > 0 et au-dessous si Y est < 0 .

Pour $x=0$, $Y=-2$; donc en prenant $AC=2$, on a en C un point de la courbe.

Pour toute valeur de x moindre que 1, Y ne cesse d'être négatif, et lorsque $x=1$, $Y=\infty$, la courbe part donc de C, en restant au-dessous de AB, et s'en va rencontrer à l'infini la parallèle $k'k''$, menée à l'axe des y à une distance $Ok=1$; on a ainsi la branche CU.

Pour toute valeur positive de $x > 1$, Y redevient positif, la courbe se trouve donc alors au-dessus de AB ; elle part de l'infini suivant kk' , et l'ordonnée Y va sans cesse en décroissant.

Pour $x=\infty$, $Y=0$, donc la courbe rencontre AB à l'infini.

Occupons-nous de la portion de la courbe située du côté des x négatifs ; à cet effet remplaçons dans Y, x par $-x$, nous aurons ainsi pour l'ordonnée Y, située du côté des x négatifs :

$$Y = -\frac{2}{x+1}.$$

Y restera donc constamment négative. Pour des valeurs de x croissantes depuis zéro, Y va sans cesse en décroissant, et pour $x=\infty$, $Y=0$, donc la branche CU se rapproche indéfiniment de AB et rencontre cette droite à l'infini.

Recherche des points maximums ou minimums.

L'équation de la courbe différenciée deux fois donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x-1} = 1 - \frac{2}{(x-1)^2} = f'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = + \frac{4}{(x-1)^3} = f''(x).$$

Les coordonnées des points maximums ou minimums seront données par la résolution des équations :

$$2x - y = 0,$$

$$xy - x^2 - y - 1 = 0,$$

lesquelles, en éliminant y , donnent l'équation

$$x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Les abscisses des points maximums ou minimums sont donc :

$$x' = 1 + \sqrt{2}, \quad x'' = 1 - \sqrt{2} = -(\sqrt{2} - 1).$$

la substitution de ces racines dans $f''(x)$ donne :

$$f''(x') > 0, \quad f''(x'') < 0$$

Le point M [$x' = 1 + \sqrt{2}$, $y' = 2(1 + \sqrt{2})$] est donc un point minimum, et le point N [$x'' = -(\sqrt{2} - 1)$, $y'' = -2(\sqrt{2} - 1)$] est aussi un point minimum.

Aire de la courbe. — Cherchons l'aire de la courbe, comprise entre l'origine et une ordonnée correspondant à une abscisse $x < 1$.

Puisque :

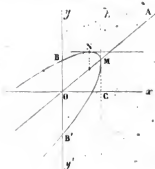
$$y = x + 1 + \frac{2}{x-1},$$

nous aurons, A étant l'aire cherchée :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^x y dx = \int_0^x x dx + \int_0^x dx + 2 \int_0^x \frac{dx}{x-1}, \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 2 \int_0^x \frac{d(x-1)}{x-1}, \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 2 \log(x-1). \end{aligned}$$

IV. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$y^2 - 2xy + x^2 + x - 1 = 0.$$



Ici $b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$, la courbe cherchée est donc limitée dans un sens et illimitée dans l'autre.

Résolue par rapport à y , l'équation donne :

$$y = x \pm \sqrt{1-x}.$$

La droite OA ($y = x$), est un diamètre de la courbe; et l'ordonnée Y comptée à partir de ce diamètre, a pour expression :

$$Y = \pm \sqrt{1-x}.$$

Pour $x = 0$, $Y = \pm 1$.

Si donc l'on prend $OB = OB' = 1$, on a en B et en B' deux points de la courbe.

Pour des valeurs positives et moindres que 1 attribuées à x , Y ne cesse d'être réelle; pour $x = 1$, $Y = 0$, et au delà de $x = 1$, Y ne cesse d'être imaginaire. Donc, si l'on prend $OC = 1$, et si par C on mène la parallèle $C\lambda$ à l'axe des y , laquelle parallèle rencontre OA en M, on a en M une pointe de la courbe. Entre les parallèles yy' et $C\lambda$, on obtient la branche de courbe BMB' et au delà de la parallèle $M\lambda$, il n'y a aucun point de la courbe.

Pour obtenir la partie de la courbe située du côté des x négatifs, remplaçons x par $-x$ dans Y , et nous aurons :

$$Y = \pm \sqrt{1+x}.$$

Donc, du côté des x positifs, Y ne cesse d'être réelle et de croître indéfiniment; la courbe s'étend donc vers l'infini à partir des points B et B'.

Recherche des points maximums ou minimums.

L'équation de la courbe différenciée deux fois donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x - 1}{2(y-x)} = 1 \mp \frac{1}{2\sqrt{1-x}} = f'(x),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{1}{4} \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} = f''(x).$$

Les coordonnées des points maximums ou minimums seront données par la résolution des équations :

$$y^2 - 2xy + x^2 + x - 1 = 0,$$

$$2y - 2x - 1 = 0.$$

L'élimination y donne l'équation :

$$x - \frac{3}{4} = 0, \text{ d'où } x = \frac{3}{4}.$$

La substitution de cette valeur dans $f''(x)$ donne :

$$f''\left(\frac{3}{4}\right) < 0. \quad \text{pour le signe } - \text{ de } f''(x).$$

Donc, à l'abscisse $x = \frac{3}{4}$ correspond un point maximum N dont l'ordonnée est $+\frac{5}{4}$. Il n'y a pas de point minimum.

Forme de la courbe en M. — La substitution des coordonnées $x = 1$, $y = 1$ du point M dans $\frac{dy}{dx}$ donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{0} = \infty.$$

la courbe est donc tangente en M à la droite C_A.

Aire de la courbe. Appelons y' la valeur de y qui correspond au signe + du radical et proposons-nous de calculer l'aire BNMO. A étant l'aire cherchée, on a la figure :

$$A = \int_0^{+1} y' dx - \text{triangle OMC.}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int y' dx &= \int x dx + \int \sqrt{1-x} dx, = \\ &= \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{1-x} d(1-x), \\ &= \frac{x^2}{2} - \int (1-x)^{\frac{1}{2}} d(1-x), \\ &= \frac{x^2}{2} - 2 \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, cette intégrale devient $-\frac{2}{3} + C$.

Pour $x = 1$, cette intégrale devient $\frac{1}{2} + C$.

Donc :

$$\int_0^{+1} y' dx = \frac{7}{6}, \text{ et par suite :}$$

$$A = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}.$$

**SIMPLIFICATION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU DEUXIÈME DEGRÉ
À DEUX VARIABLES.**

Disparition des termes du premier degré.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes en un point dont les coordonnées sont m et n ; les formules de transformation étant :

$$x = X + m, \quad y = Y + n.$$

l'équation générale du deuxième degré $ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, rapportée aux nouveaux axes devient :

$$a(y+n)^2 + b(x+m)(y+n) + c(x+m)^2 + d(y+n) + e(x+m) + f = 0.$$

ou bien :

$$\left. \begin{array}{r|l} ay^2 + bxy + cx^2 + 2an & y + 2cm \\ +bm & +bn \\ +d & +e \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + an^2 \\ +bm \\ +cm^2 \\ +dn \\ +em \\ +f \end{array} \right\} = 0 \dots (1)$$

La nouvelle origine étant arbitraire, ses coordonnées m et n sont indéterminées ; on peut donc profiter de cette indétermination pour leur donner les valeurs tirées des équations :

$$2an + bm + d = 0.$$

$$2em + bn + e = 0.$$

lesquelles valeurs sont :

$$m = \frac{2ae - bd}{b^2 - 4ac}, \quad n = \frac{2ed - be}{b^2 - 4ac}.$$

Alors, rapportée à cette nouvelle origine, l'équation (1) se réduit à :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + K = 0.$$

K étant le résultat de la substitution des valeurs de m et de n , dans le terme indépendant des variables.

Par cette transformation, l'équation du deuxième degré perd ses termes du premier degré.

Loi de formation des équations de la nouvelle origine.

Les coordonnées de la nouvelle origine sont données par les équations :

$$2an + bm + d = 0.$$

$$2cm + bn + e = 0.$$

Les premiers membres de ces équations sont : les dérivées du premier membre de l'équation générale du deuxième degré, prises respectivement par rapport à y et à x , en y considérant successivement y et x comme seule variable; puis en remplaçant dans ces dérivées x et y par m et n .

En sorte que $f(x, y) = 0$ étant l'équation générale du deuxième degré, les coordonnées de la nouvelle origine, pour laquelle l'équation perd ses termes du premier degré, sont données par la résolution des équations :

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

Si l'on voulait construire géométriquement cette nouvelle origine, il suffirait de construire chacune des droites dont les équations sont :

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

leur intersection serait l'origine cherchée.

La nouvelle origine est le centre de la courbe.

Rapportée à cette nouvelle origine l'équation du deuxième degré devient :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + K = 0.$$

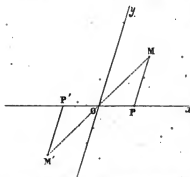
L'observation de cette équation montre qu'elle ne change pas alors qu'on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$. Donc si M' est un point de la courbe, rapportée à sa nouvelle origine O , le point M'' tel que ses coordonnées sont,

$$OP' = - (OP).$$

$$M'P' = - (MP).$$

est aussi un point de la courbe. Or, si l'on joint MO et $M'O$, on forme deux triangles MOP , $M'OP'$ égaux; par suite :

$$\begin{aligned}\text{angle } MOP &= \text{angle } M'O'P' \\ MO &= M'O,\end{aligned}$$



c'est-à-dire, que la ligne MOM' est droite et qu'elle est divisée à l'origine en deux parties égales.

Cette droite MM' est une corde de la courbe; donc toute corde qui passe par l'origine y est divisée en deux parties égales, c'est-à-dire que l'origine est le centre de la courbe.

La courbe du deuxième degré dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac = 0$, n'a pas de centre et

dans ce cas, l'équation générale du deuxième degré ne peut perdre à la fois ses termes du premier degré.

En effet, la discussion de l'équation générale du deuxième degré, nous montre que cette équation représente trois courbes distinctes par leur forme, lesquelles répondent aux trois caractères analytiques :

$$b^2 - 4ac < 0, \quad b^2 - 4ac > 0 \quad \text{et} \quad b^2 - 4ac = 0.$$

Pour les deux premières, les coordonnées

$$m = \frac{2ac - bd}{b^2 - 4ac}, \quad n = \frac{2cd - bc}{b^2 - 4ac}$$

du centre sont des quantités finies puisque $b^2 - 4ac$ est différent de zéro.

Pour la troisième, la différence $b^2 - 4ac = 0$; alors m et n sont infinies; le centre y est donc situé à l'infini, c'est dire qu'il n'y en a pas et que les équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

sont incompatibles.

La courbe du caractère $b^2 - 4ac = 0$ n'a donc pas de centre et son équation ne peut perdre à la fois les termes du premier degré.

Ce qui précède suppose que le numérateur de m ou de n n'est pas nul; s'il en était ainsi, c'est-à-dire si m a la forme $\frac{0}{0}$; on sait que n a aussi la même forme; dans ce cas les valeurs de m et de n se présentent toutes deux sous la forme $\frac{0}{0}$; elles sont donc indéterminées, ce qui indique une infinité de centres.

En effet, si $bd - 2ac = 0$, ainsi que $b^2 - 4ac = 0$, l'équation générale

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

qui résolve, donne :

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{(b^2 - 4ac)x^2 + 2(bd - 2ac)x + d^2 - 4af}$$

devient :

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{d}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{d^2 - 4af}.$$

L'équation représente alors deux droites parallèles. Le lieu de leurs centres est la parallèle équidistante.

Calcul du coefficient numérique K.

On a :

$$K = an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f.$$

Les équations de la nouvelle origine :

$$2an + bm + d = 0 \dots \dots (1)$$

$$2cm + bn + e = 0 \dots \dots (2)$$

donnent en multipliant la première par n , la seconde par m et en ajoutant les deux équations obtenues après cette multiplication :

$$2(an^2 + bmn + cm^2) + dn + em = 0.$$

d'où :

$$an^2 + bmn + cm^2 = -\frac{dn + em}{2}.$$

le coefficient K devient donc, en y remplaçant $an^2 + bmn + cm^2$ par cette valeur :

$$K = \frac{dn + em}{2} + f.$$

La substitution des nombres m et n tirés des équations (1) et (2) achèvera la détermination du coefficient K .

Disparition du terme en y et du terme indépendant des variables dans l'équation générale du deuxième degré, alors que $b^2 - 4ac = 0$.

Puisqu'on ne peut ici, faire disparaître les termes du premier degré dans l'équation :

$$\begin{array}{ccc|ccc} ay^2 + bxy + cx^2 + 2ay & y + 2cm & x + an^2 \\ & +bm & +bmn \\ & +d & +cm^2 \\ & & +dn \\ & & +em \\ & & +f \end{array} = 0.$$

On pourra profiter de l'indétermination des quantités m et n pour leur donner les valeurs tirées des équations :

$$\begin{aligned} 2an + bm + d &= 0 \\ an^2 + bmn + cm^2 + dn + em + f &= 0. \end{aligned}$$

La seconde devient en multipliant par $4a$ ses deux membres :

$$4a^2n^2 + 4abm + 4acm^2 + 4adn + 4aem + 4af = 0$$

ou bien puisque $4ac = b^2$

$$(2an + bm)^2 + 4adn + 4acm + 4af = 0.$$

et puisque la première donne :

$$\begin{aligned} 2an + bm &= -d \\ 4adn + 4aem + d^2 + 4af &= 0. \end{aligned}$$

Les coordonnées de la nouvelle origine seront donc données par la résolution des équations :

$$2an + bm + d = 0 \dots\dots\dots (u)$$

$$4adn + 4aem + d^2 + 4af = 0 \dots\dots (u')$$

Le dénominateur

$$4a(bd - 2ac)$$

est généralement différent de zéro. S'il était nul, on sait que la courbe se réduirait à deux lignes droites (page 235).

La transformation est donc toujours possible, et par rapport à la nouvelle origine, l'équation de la courbe du caractère analytique $b^2 - 4ac = 0$, se réduit à :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + Hx = 0.$$

La nouvelle origine est donc un point de la courbe.

Les équations (u) et (u') comme les équations

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0.$$

sont du premier degré, c'est-à-dire que les transformations que l'on vient d'indiquer n'ont lieu que pour un seul point.

Disparition du terme contenant le rectangle xy des variables.

Considérons d'abord l'équation générale du deuxième degré, alors que $b^2 - 4ac$ est différent de zéro; supposons qu'on y ait fait disparaître les termes en x et y ; cette équation est alors ramenée à la forme :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + K = 0.$$

Supposons en outre les axes rectangulaires.

Passons de ces axes rectangulaires à un système d'axes obliques sans changer d'origine; alors α et α' étant les angles que les nouveaux axes font avec l'ancien axe des x , les formules de transformations sont :

$$x = X \cos \alpha + Y \cos \alpha'.$$

$$y = X \sin \alpha + Y \sin \alpha'.$$

En sorte que, rapportée aux nouveaux axes obliques, l'équation de la courbe devient :

$$\left. \begin{array}{l} a \sin^2 \alpha' \\ + b \sin \alpha' \cos \alpha \\ + c \cos^2 \alpha' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y^2 + 2a \sin \alpha \sin \alpha' \\ + b \sin \alpha' \cos \alpha \\ + b \sin \alpha \cos \alpha' \\ + 2c \cos \alpha \cos \alpha' \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} xy + a \sin^2 \alpha \\ + b \sin \alpha \cos \alpha \\ + c \cos^2 \alpha \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^2 + K \end{array} \right\} = 0.$$

Les angles α et α' étant indéterminés, on pourra profiter de cette indétermination pour leur donner les valeurs tirées de l'équation :

$$2a \sin \alpha \sin \alpha' + b (\sin \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha') + 2c \cos \alpha \cos \alpha' = 0.$$

ou bien :

$$(1) \dots 2a \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' + b (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha') + 2c = 0.$$

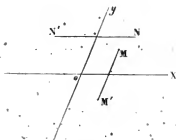
Et alors, l'équation de la courbe pour les valeurs de α et de α' tirées de (1), prend la forme :

$$My^2 + Nx^2 + K = 0.$$

L'équation (1) étant unique pour déterminer α et α' , il en résulte qu'il existe une infinité de valeurs pour α et α' ; en d'autres termes, il existe une infinité d'axes obliques passant par le centre (car l'origine est le centre de la courbe) pour lesquels l'équation de la courbe prend la forme :

$$My^2 + Nx^2 + K = 0.$$

LES NOUVEAUX AXES SONT DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DE LA COURBE.



Soit y_0 , OX un des systèmes d'axes pour lesquels l'équation de la courbe se ramène à la forme :

$$M.y^2 + N.x^2 + K = 0.$$

Cette équation montre que pour une même valeur de x , on obtient pour y deux valeurs égales et de signes contraires; l'axe des x divise donc en parties égales, les cordes de la courbe, parallèles à l'axe des y .

L'axe des x est donc un diamètre.

De même, pour toute valeur de y , on obtient pour x deux valeurs égales et de signes contraires; l'axe des y divise donc en parties égales les cordes de la courbe, parallèles à l'axe des x .

L'axe des y est donc un diamètre.

On voit ainsi que l'axe des x et l'axe des y sont des diamètres réciproquement parallèles aux cordes qu'ils divisent en parties égales. Pour cette raison, on dit qu'ils sont *conjugués*.

Puisqu'il y a une infinité de systèmes d'axes obliques pour lesquels l'équation du deuxième degré, alors que $b^2 - 4ac$ est différent de zéro, se ramène à la forme $M y^2 + N x^2 + K = 0$, et que les axes sont des diamètres conjugués, il en résulte que, dans les deux courbes, dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac < 0$ ou $b^2 - 4ac > 0$, il y a une infinité de systèmes de diamètres conjugués.

Dans les courbes du caractère analytique $b^2 - 4ac < 0$ ou $b^2 - 4ac > 0$, il n'y a qu'un seul système d'axes rectangulaires pour lesquels les équations de ces courbes peuvent se ramener à la forme $My^2 + Nx^2 + K = 0$.

Les angles α et α' donnés par la relation

$$(1) \dots\dots 2a \sin \alpha \sin \alpha' + b \sin (\alpha' + \alpha) + 2c \cos \alpha \cos \alpha' = 0,$$

sont en nombre illimité, si on les assujettit à la condition

$$\alpha' - \alpha = 90^\circ,$$

laquelle exprime que les nouveaux axes sont rectangulaires; l'indétermination cesse, car la seconde équation donne $\alpha' = 90^\circ + \alpha$ et l'équation (1) devient :

$$(a - c) \sin 2\alpha + b \cos 2\alpha = 0,$$

d'où l'on tire :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{b}{a - c}.$$

On ne trouve donc qu'une seule valeur pour α (*), et, par suite, une seule pour α' .

Il n'y a donc qu'un seul système d'axes rectangulaires pour lesquels l'équation du second degré, alors que $b^2 - 4ac$ est < 0 ou > 0 , peut se ramener à la forme $My^2 + Nx^2 + K = 0$.

Il n'y a donc, dans les courbes que cette équation représente, qu'un seul système de diamètres conjugués rectangulaires.

Dans ce cas, ces deux diamètres conjugués sont dits les axes de la courbe.

Calcul des coefficients M et N de y^2 et de x^2 .

Les nouveaux axes étant rectangulaires, on a :

$$M = a \cos^2 \alpha - b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha,$$

$$N = a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha,$$

(*) L'angle 2α étant donné par sa tangente, il semble que l'on trouve pour α quatre valeurs, savoir :

$$\alpha, \quad 90^\circ + \alpha, \quad 180^\circ - \alpha, \quad \text{et} \quad 270^\circ + \alpha.$$

Ces quatre valeurs de α ne représentent qu'un seul système de deux droites perpendiculaires.

d'où on tire successivement :

$$M + N = a + c,$$

$$\begin{aligned} M - N &= a (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - b \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha - c (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha), \\ &= (a - c) \cos 2\alpha - b \sin 2\alpha, \\ &= \cos 2\alpha (a - c - b \operatorname{tg} 2\alpha), \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} (a - c - b \operatorname{tg} 2\alpha), \end{aligned}$$

et en remplaçant $\operatorname{tg} 2\alpha$ par sa valeur $-\frac{b}{a-c}$, il vient finalement :

$$M - N = \sqrt{(a-c)^2 + b^2},$$

d'où :

$$M = \frac{1}{2} (a + c + \sqrt{(a-c)^2 + b^2}), \quad N = \frac{1}{2} (a + c - \sqrt{(a-c)^2 + b^2}),$$

ainsi se trouvent calculés les coefficients M et N .

Les courbes du deuxième degré dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac < 0$ sont des ellipses.

L'équation du deuxième degré étant ramenée à la forme :

$$M y^2 + N x^2 = -K,$$

nous supposons les axes rectangulaires, ces axes représentent alors les seuls axes de la courbe.

Ici :

$$b^2 - 4ac = -4MN.$$

donc, pour que $b^2 - 4ac$ soit < 0 , il faut que M et N soient de même signe.

Supposons $-K$ positif, et soit $-K = p^2$, alors M et N étant tous deux positifs et l'équation de la courbe devient :

$$M y^2 + N x^2 = p^2 \dots\dots (1);$$

Pour $x = 0$,

$$y^2 = \frac{p^2}{M}.$$

La valeur absolue de y , tirée de cette équation, est celle du demi-axe de la courbe, dirigé suivant l'axe des y ; si donc, on appelle b ce

demi-axe, on aura :

$$b^2 = \frac{p^2}{M}, \quad \text{d'où} \quad M = \frac{p^2}{b^2}$$

Pour $y = 0 \dots \dots x^2 = \frac{p^2}{N}$.

La valeur absolue de x , tirée de cette équation, est celle du demi-axe de la courbe, dirigé suivant l'axe des x ; si donc, on appelle x ce demi-axe, on aura :

$$a^2 = \frac{p^2}{N}, \quad \text{d'où} \dots \dots N = \frac{p^2}{a^2},$$

et en portant ces valeurs de M et de N dans (1), il vient :

$$p^2 \frac{y^2}{b^2} + p^2 \frac{x^2}{a^2} = p^2,$$

d'où :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

nous retrouvons ainsi l'équation de l'ellipse.

Donc, alors que $b^2 - 4ac < 0$, l'équation générale du deuxième degré représente une ellipse.

Et, de ce qui précède, il résulte que l'ellipse a un centre, une infinité de diamètres conjugués et un seul système d'axes.

Les courbes du deuxième degré, dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac > 0$, sont des hyperboles.

L'équation du deuxième degré étant ramenée à la forme

$$M y^2 + N x^2 = -K,$$

nous supposons les axes rectangulaires, ces axes représentent alors les seuls axes de la courbe.

Ici :

$$b^2 - 4ac = -4MN.$$

Donc, pour que $b^2 - 4ac$ soit > 0 , il faut que M et N soient de signes contraires.

Supposons ici $-K$ négatif, puis N négatif et M positif, l'équation proposée s'écrit ainsi :

$$M y^2 - N x^2 = -p^2 \dots \dots (1).$$

Pour $x = 0$: $y^2 = -\frac{p^2}{M}$.

Cette valeur de y étant imaginaire, cela veut dire que l'axe de la courbe, dirigée suivant l'axe des y , ne rencontre pas la courbe; pour cette raison, cet axe est appelé *l'axe non transverse*.

Appelons b^2 la valeur absolue $\frac{p^2}{M}$, alors :

$$b^2 = \frac{p^2}{M}, \quad \text{d'où} \dots\dots M = -\frac{p^2}{b^2}.$$

Pour $y = 0 \dots\dots\dots x^2 = -\frac{p^2}{N}$.

La valeur de x , tirée de cette équation, est réelle, elle représente la longueur du demi-axe de la courbe, dirigée suivant l'axe des x ; cet axe est dit *l'axe transverse*, et si l'on appelle a ce demi-axe, on a :

$$a^2 = -\frac{p^2}{N} \dots\dots, \quad \text{d'où } N = -\frac{p^2}{a^2}.$$

L'équation (1) devient donc en y remplaçant M et N par les valeurs que nous venons de trouver :

$$p^2 \frac{y^2}{b^2} - p^2 \frac{x^2}{a^2} = -p^2,$$

d'où :

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

nous retrouvons ainsi l'équation de l'hyperbole.

Donc : alors que $b^2 - 4ac > 0$, l'équation générale du deuxième degré représente une hyperbole.

De ce qui précède, il résulte que *l'hyperbole a un centre, une infinité de diamètres conjugués et un seul système d'axes*.

Disparition du terme contenant le rectangle xy dans l'équation générale du deuxième degré alors que $b^2 - 4ac = 0$.

Nous avons vu comment on ramène l'équation générale du deuxième degré à la forme :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + Hx = 0 \dots\dots (2),$$

alors que $b^2 - 4ac = 0$.

Supposons ici les axes rectangulaires.

Si au moyen des angles α et α' que font les axes d'un système d'axes obliques avec l'ancien axe des x , on veut faire disparaître le terme en xy ; on n'aura qu'une seule équation pour déterminer α et α' , c'est-à-dire qu'il y a une infinité d'axes obliques pour lesquels l'équation, alors que $b^2 - 4ac = 0$, perd son terme en xy ; on ne trouvera aussi qu'un seul système d'axes rectangulaires qui remplissent le même but.

Le terme en xy ayant disparu, l'équation (1) prend alors la forme :

$$My^2 + Nx^2 + Px = 0.$$

Ici :

$$b^2 - 4ac = -4MN = 0,$$

il faut donc que M ou N soit nul, ce ne peut être M , car, alors, l'équation se réduirait à :

$$Nx^2 + Px = 0,$$

et représenterait deux lignes parallèles à l'axe des y ; donc $M = 0$ et la transformation qui fait disparaître le rectangle xy des variables, ramène du même coup, l'équation à la forme très-simple :

$$My^2 + Px = 0.$$

Les courbes du deuxième degré, dont le caractère analytique est $b^2 - 4ac = 0$, sont des paraboles.

L'équation étant ramenée à la forme :

$$My^2 + Px = 0,$$

on en tire :

$$y^2 = -\frac{P}{M}x.$$

et si l'on pose $-\frac{P}{M} = 2p$.

$$y^2 = 2px.$$

Nous retrouvons ainsi l'équation de la parabole.

Donc : alors que $b^2 - 4ac = 0$, l'équation générale du deuxième degré représente une parabole.

De ce qui précède, il résulte que la parabole n'a pas de centre (il est à l'infini) et il existe une infinité d'axes obliques et un seul système d'axes rectangulaires pour lesquels son équation se ramène à la forme $y^2 = 2px$.

Disparition des termes en x^2 et en y^2 .

Une telle transformation ne peut se faire pour la parabole; car, alors $b^2 - 4ac$ devant être nul, et a et c le devenant par cette transformation, on aurait $b^2 = 0$; de telle sorte que l'équation générale du deuxième degré se réduirait à une équation du premier degré.

La transformation ne saurait avoir lieu non plus pour l'ellipse, car $b^2 - 4ac$ devient b^2 ; cette différence ne saurait donc être négative après cette transformation.

Prenons donc l'équation générale de l'hyperbole rapportée à son centre; cette équation est :

$$ay^2 + bxy + cx^2 + K = 0.$$

Supposons les axes rectangulaires et passons à un système d'axes obliques, α et α' étant les angles que les nouveaux axes font avec l'ancien axe des x , l'équation rapportée à ces nouveaux axes devient :

$$\left. \begin{array}{l} a \sin^2 \alpha' \\ + b \sin \alpha' \cos \alpha' \\ + c \cos^2 \alpha' \end{array} \right\} y^2 + \left. \begin{array}{l} 2a \sin \alpha \sin \alpha' \\ + b \sin (\alpha' + \alpha) \\ + 2c \cos \alpha \cos \alpha' \end{array} \right\} xy + \left. \begin{array}{l} a \sin^2 \alpha + K \\ + b \sin \alpha \cos \alpha \\ + c \cos^2 \alpha \end{array} \right\} = 0 \dots (u)$$

Pour que les termes en x^2 et en y^2 disparaissent, il faut donner à α et à α' les valeurs tirées des équations :

$$a \sin^2 \alpha' + b \sin \alpha' \cos \alpha' + c \cos^2 \alpha' = 0,$$

$$a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha = 0,$$

ou bien :

$$\left. \begin{array}{l} a \operatorname{tg}^2 \alpha' + b \operatorname{tg} \alpha' + c = 0 \\ a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c = 0 \end{array} \right\} \dots \dots (1)$$

Ces deux équations sont identiques, et puisqu'elles sont du deuxième degré par rapport à l'inconnue $\operatorname{tg} \alpha$, il en résulte que les valeurs, tirées de l'une d'elles pour α , sont les valeurs respectives de α et de α' . Il n'y a donc qu'un seul système d'axes pour lesquels la transformation soit possible; encore, faut-il que les racines de l'équation (1) soient réelles, ce qui exige que l'on ait :

$$b^2 - 4ac > 0.$$

Il en résulte que la transformation n'a lieu que pour l'hyperbole, ce que l'on savait. Si l'on porte dans l'équation (u) les valeurs de α et α' tirées des équations (1), et si l'on appelle P le résultat de cette substitu-

tion dans le coefficient de xy , on aura pour l'équation de l'hyperbole la forme particulière et très-simple :

$$Pxy + K = 0.$$

APPLICATIONS NUMÉRIQUES SUR LA RÉDUCTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE
DU DEUXIÈME DEGRÉ.

1. Ramener à la forme $My^2 + Nx^2 = P$, l'équation numérique

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 2y - 4x + 7 = 0, \dots\dots (1)$$

Disposition des termes du premier degré. — Calcul des coordonnées du centre.

Les coordonnées du centre de la courbe sont données par la résolution des équations :

$$\frac{df}{dx} = -2y + 4x - 3 = 0.$$

$$\frac{df}{dy} = 2y - 2x - 2 = 0.$$

Les coordonnées du centre, tirées de ces équations, sont donc :

$$m = \frac{5}{2}, \quad n = \frac{7}{2}.$$

Par suite, si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point C $(x = \frac{5}{2}, y = \frac{7}{2})$.

Rapportée aux nouveaux axes YC, CX, l'équation (1) perd ses termes en x et y et prend la forme :

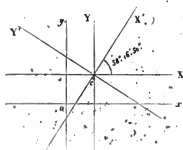
$$y^2 - 2xy + 2x^2 + K = 0.$$

Calcul de K. — On sait que :

$$K = \frac{dn + em}{2} + f.$$

Ici $m = \frac{5}{2}, \quad n = \frac{7}{2}, \quad d = -2, \quad e = -3, \quad f = 7.$

D'où :



$$K = \frac{-14-15}{4} + 7 = -\frac{1}{4}.$$

Donc, rapportée aux axes YC, CX, l'équation (1) devint

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Disparition du rectangle xy des variables.

En passant des axes rectangulaires YC, CX à un autre système d'axes rectangulaires, on introduit une indéterminée (l'angle α que fait l'axe des x avec CX); on profite de cette indétermination pour annuler le coefficient du terme en xy , ce qui donne, pour la détermination de cet angle, l'équation :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{b}{a-c}.$$

Par suite ici :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{-2}{1-2} = -2.$$

$\operatorname{tg} 2\alpha$ étant négative, il en résulte que 2α est $> 90^\circ$ posons $2\alpha = 90^\circ + u$, d'où :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} (90^\circ + u) = -\operatorname{tg} (90^\circ - u) = -\cot u.$$

$$\cot u = 2.$$

$$\log \cot u = 10,3010300.$$

$$u = 36^\circ 33' 40''.$$

Donc :

$$2\alpha = 116^\circ 33' 40''.$$

$$\alpha = 58^\circ 16' 50''.$$

Par conséquent si en C on fait un angle $X'CX = 58^\circ 16' 40''$, et si l'on élève la perpendiculaire YC sur CX' on a en CX' et en YC la direction des axes de l'ellipse. L'équation de la courbe rapportée à ces axes est de la forme :

$$My^2 + Nx^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Calcul de M et de N. — On a obtenu les formules :

$$M + N = a + c.$$

$$M - N = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}.$$

Ici $a = 1, c = +2, b = -2$.

Par suite :

$$M + N = 3.$$

$$M - N = \sqrt{5}.$$

d'où :

$$M = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) \quad N = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}).$$

Donc rapportée aux axes $Y'C$ et CX' , l'équation de la courbe devient :

$$(3 + \sqrt{5}) y^2 + (3 - \sqrt{5}) x^2 = \frac{1}{8}$$

Calcul des axes. — En faisant $x = 0$, puis $y = 0$, dans l'équation de la courbe rapportée à ses axes, on a, en appelant $2a$ et $2b$ les axes de cette courbe :

$$2a = 2 \sqrt{\frac{1}{8(3 - \sqrt{5})}}$$

$$2b = 2 \sqrt{\frac{1}{8(3 + \sqrt{5})}}$$

II. Ramener à la forme $My^2 + Nx^2 = P$ l'équation

$$y^2 - 2xy - x^2 + x = 0 \dots \dots (1)$$

Disparition des termes du premier degré. — Coordonnées du centre.

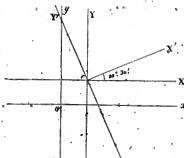
Les coordonnées du centre de la courbe sont données par la résolution des équations :

$$\frac{df}{dy} = 2y - 2x = 0.$$

$$\frac{df}{dx} = -2y - 2x + 1 = 0.$$

Les coordonnées du centre, tirées de ces équations sont donc :

$$m = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{4}.$$



Par suite si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point C ($x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{4}$); rapportée aux nouveaux axes YC, CX, l'équation perd ses termes du premier degré et prend la forme :

$$y^2 - 2xy - x^2 + K = 0.$$

Calcul de K. — On sait que :

$$K = \frac{dn + em}{2} + f.$$

Ici

$$m = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad d = 0, \quad e = 1, \quad f = 0.$$

d'où :

$$K = \frac{1}{8}.$$

L'équation (1) rapportée aux axes YC, XC devient donc :

$$y^2 - 2xy - x^2 = -\frac{1}{8} \dots \dots (2)$$

Disparition du rectangle xy des variables.

En passant des axes rectangulaires YC, CX à un autre système d'axes rectangulaires, on introduit une seule indéterminée (l'angle que le nouvel axe des x fait avec CX); on profite de cette indétermination pour annuler le coefficient du terme en xy ; ce qui donne pour la détermination de cet angle, l'équation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{b}{a-c}.$$

Par suite ici :

$$\operatorname{tg} 2 = -\frac{-2}{1+1} = +1.$$

d'où :

$$2\alpha = 45^\circ,$$

$$\alpha = 22^\circ 30'.$$

Donc si en C, avec CX, on fait l'angle

$$\angle X'CX = 22^\circ 30'.$$

et si en C on élève la perpendiculaire CY'; rapportée aux axes Y'C, CX', l'équation (2) perd son terme en xy et prend la forme :

$$My^2 + Nx^2 = -\frac{1}{8}.$$

Calcul de M et de N. — On a obtenu les formules :

$$M + N = a + c.$$

$$M - N = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}.$$

Ici :

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -1.$$

Par suite :

$$M + N = 0.$$

$$M - N = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

d'où :

$$M = \sqrt{2}, \quad N = -\sqrt{2}.$$

Rapportée aux axes Y'C, CX', l'équation de la courbe devient donc :

$$\sqrt{2} \cdot y^2 - \sqrt{2} \cdot x^2 = -\frac{1}{8}.$$

Calcul des axes. — $2a$ et $2b$ étant les axes de la courbe, lesquels sont dirigés suivant les droites Y'C et C'X, on a :

$$2a = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}.$$

$$2b = -\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}.$$

L'axe $2b$ dirigé suivant l'axe des y est l'axe *non transverse* de la courbe.

III. Ramener à la forme $Pxy = Q$, l'équation :

$$y^2 - 2xy - x^2 + x = 0.$$

On vient de voir que, en transportant les axes parallèlement à eux-mêmes au point C $\left(x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{4}\right)$, rapportée aux nouveaux axes YC, CX, l'équation proposée perd son terme du premier degré et prend la forme :

$$y^2 - 2xy - x^2 = -\frac{1}{8}.$$

Pour faire disparaître les termes en y^2 et en x^2 , on passe du système des axes rectangulaires YC, XC à un système d'axes obliques, ce qui introduit deux indéterminées; ces indéterminées ou les angles que les nouveaux axes font avec l'ancien axe des x sont donnés par l'équation

$$a. \operatorname{tg}^2 \alpha + b. \operatorname{tg} \alpha + c = 0.$$

laquelle devient ici (puisque $a = 1, b = -2, c = -1$),

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha - 1 = 0 \dots (u)$$

d'où :

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Les deux valeurs, tirées de cette équation, ont pour produit -1 , ainsi que le montre l'équation (u); il suffit donc de calculer la première valeur de α , donnée par $\operatorname{tg} \alpha = 1 + \sqrt{2}$, laquelle fera connaître la direction du nouvel axe des x , car le nouvel axe des y doit être perpendiculaire au nouvel axe des x .

L'équation $\operatorname{tg} \alpha = 1 + \sqrt{2}$ donne le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= 2 (\sin 30^\circ + \sin 45^\circ) = \\ &= 4 \sin (37^\circ 30'), \cos (7^\circ 30'). \end{aligned}$$

$$\operatorname{Log} \sin 37^\circ 30' = 9,784471$$

$$\operatorname{Log} \cos 7^\circ 30' = 9,9962686$$

$$\operatorname{Log} 4 = 0,6020600$$

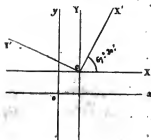
$$- 10.$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{tg} \alpha = 10,3827757$$

$$10,3827757.$$

$$\alpha = 67^\circ 30'.$$

$$\alpha' = 157^\circ 30'.$$



Si donc l'on fait en C avec CX, l'angle $X'CX = 67^\circ 30'$ et si en C sur X'C on élève la perpendiculaire Y'C, on a en Y'C et CX les axes pour lesquels l'équation perd son terme en xy et prend la forme :

$$Pxy = -\frac{1}{8}.$$

Calcul du coefficient P.

On sait que :

$$P = 2 a \sin \alpha \sin \alpha' + b (\sin \alpha' \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha') + 2 C \cos \alpha \cos \alpha'.$$

Par suite, on a successivement, puisque $a = 1$, $b = -2$ et $c = -1$:

$$\begin{aligned} P &= 2 \frac{\operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} - \\ &- 2 \left(\frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} + \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} \right) - \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}} = \\ &= \frac{2 (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha' - \operatorname{tg} \alpha - 1)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'}}. \end{aligned}$$

Or :

$$\operatorname{tg} \alpha = 1 + \sqrt{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha' = 1 - \sqrt{2},$$

donc :

$$P = - \frac{8}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = - \frac{8}{\sqrt{8}} = - \sqrt{8},$$

donc rapportée aux axes $Y'C$, CX' , l'équation proposée devient :

$$\sqrt{8} xy = \frac{1}{8}.$$

IV. Ramener à la forme $y^2 = 2px$, l'équation :

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + x - 1 = 0 \dots\dots (1)$$

Disparition du rectangle des variables.

α étant l'angle du nouvel axe des x , du système d'axes rectangulaires auquel on rapporte l'équation et pour lequel cette équation perd son terme en xy , on a :

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{b}{a-c},$$

et puisque

$$b = -2, \quad a = c = 1, \text{ il vient :}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \infty. \quad \alpha = 45^\circ.$$

L'équation (1) rapportée aux nouveaux axes devient :

f en y remplaçant x par $x \cos \alpha - y \sin \alpha$ et y par $x \sin \alpha + y \cos \alpha$.

$$(2) \dots\dots My^2 + Nx^2 + (d \cos \alpha - e \sin \alpha) y + (d \sin \alpha + e \cos \alpha) x - 1 = 0,$$

et l'on a :

$$M = a + e = 2 \dots\dots \text{puisque } a = 1, e = 1,$$

$$N = 0,$$

$$d = -2, e = +1.$$

L'équation (2) devient donc par substitution :

$$2y^2 - (2 \cos \alpha + \sin \alpha) y - (2 \sin \alpha - \cos \alpha) x - 1 = 0,$$

et puisque $\alpha = 45^\circ$,

$$2y^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x - 1 = 0.$$

Disparition du terme en Y et du terme indépendant des variables.

Transportons les axes parallèlement à eux-mêmes en un point dont les coordonnées indéterminées, sont a et b . Rapportée à ces nouveaux axes, l'équation devient :

$$2(y+b)^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}(y+b) - \frac{1}{2}\sqrt{2}(x+a) - 1 = 0,$$

d'où :

$$\left. \begin{array}{l} 2y^2 + 4b \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} y - \frac{1}{2}\sqrt{2}x + 2b^2 \\ -\frac{3}{2}\sqrt{2}b \\ -\frac{a}{2}\sqrt{2} \end{array} \right\} = 0,$$

et si l'on détermine a et b par les équations :

$$4b - \frac{3}{2}\sqrt{2} = 0 \dots\dots (1),$$

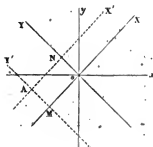
$$2b^2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}b - \frac{a}{2}\sqrt{2} = 0 \dots\dots (2).$$

rapportée aux axes de cette nouvelle origine, l'équation devient :

$$2y'^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} x.$$

Les coordonnées de la nouvelle origine, tirées des équations (1) et (2), sont :

$$b = \frac{3}{8} \sqrt{2}, \quad a = -\frac{9}{8} \sqrt{2}.$$



Donc : si $y_0, 0x$ sont les axes rectangulaires auxquels est rapportée l'équation proposée :

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + x - 1 = 0.$$

En menant les bissectrices Y_0, X_0 de ces axes et en prenant sur ces lignes :

$$OM = \frac{9}{8} \sqrt{2}, \quad ON = \frac{3}{8} \sqrt{2}.$$

puis en menant par les points M et N les parallèles AY', AX' aux axes OY, OX , on a en $Y'A, AX'$ les axes pour lesquels l'équation proposée devient :

$$2y'^2 = \frac{1}{2} \sqrt{2} x.$$

Le point A est donc le sommet de la parabole. AX' en est l'axe.

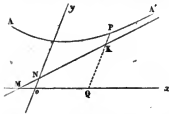
Enfin le foyer F de la courbe se trouve à une distance de A marquée par

$$AF = \frac{1}{16} \sqrt{2}.$$

THÉORIE DES ASYMPTOTES.

DÉFINITION.

Une droite MN est dite *asymptote* d'une branche de courbe AA', alors qu'elle s'approche indéfiniment de cette courbe et ne la rencontre qu'à l'infini.



Il résulte de cette définition, que la différence PK des ordonnées de la courbe et de l'asymptote, correspondant à une même abscisse, tend vers zéro, lorsque x tend vers l'infini, c'est-à-dire que

pour $x = \infty$, les ordonnées de la courbe et de l'asymptote deviennent égales.

Proposons-nous de déterminer les asymptotes d'une courbe quelconque dont l'équation est $f(x, y) = 0$.

L'asymptote étant une ligne droite, son équation est de la forme :

$$y = ax + b.$$

il s'agit donc pour déterminer l'asymptote de calculer les coefficients a et b .

Puisque pour $x = \infty$, l'ordonnée de l'asymptote se confond avec l'ordonnée de la courbe, il en résulte que l'équation de l'asymptote étant $y = ax + b$, l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe devra pouvoir se mettre sous la forme :

$$y = ax + b + V. \quad (1)$$

V étant une fonction d' x , laquelle s'annule pour $x = \infty$ (*).

(*) Pour qu'une courbe ait une asymptote, il faut qu'elle ait une branche infinie ; ainsi l'équation :

$$y = x + 1 + \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$$

montre que la droite $y = x + 1$ n'est pas asymptote du lieu de cette équation, bien que le terme $\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}$ s'annule pour $x = \infty$, car le lieu ne s'étend pas au delà de l'abscisse $x = 1$.

Il s'agit donc dans l'équation (1), laquelle est l'équation de la courbe, de calculer les coefficients a et b .

Calcul du coefficient a . — L'équation (1) donne :

$$a = \frac{y}{x} - \frac{b+V}{x}$$

et pour $x = \infty$, on a :

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}.$$

Donc : le coefficient angulaire de l'asymptote d'une courbe s'obtient, en cherchant dans l'équation de cette courbe la limite du rapport $\frac{y}{x}$, alors que x tend vers l'infini.

La limite $\frac{y}{x}$, c'est-à-dire la valeur de a étant ainsi trouvée, portons-la dans l'équation

$$y = ax + b + V$$

de la courbe.

Cette équation donne :

$$b = y - ax - V.$$

et en passant à la limite $x = \infty$, on en tire :

$$b = \lim (y - ax),$$

Donc : le coefficient linéaire b de l'asymptote, s'obtient en calculant dans l'équation de la courbe, la limite de $y - ax$, pour $x = \infty$, a étant calculé par le moyen indiqué ci-dessus.

Appliquons cette méthode à la recherche des asymptotes des courbes suivantes.

I. Soit la courbe dont l'équation est $y = m^x$, on suppose $m > 1$.

Cette équation donne successivement :

$$\frac{y}{x} = \frac{m^x}{x} = \frac{1 + x \log. m + \frac{x^2 \log^2 m}{1.2} + \dots}{x}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x} + \log. m + \frac{x \log^2 m}{1.2} + \frac{x^2 \log^3 m}{1.2.3} + \dots$$

et si l'on fait $x = +\infty$, on trouve $\lim \frac{y}{x} = \infty$.

x étant négatif, on a :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{x^m}$$

et par suite ; pour $x = \infty$:

$$\lim \frac{y}{x} \text{ ou } a = 0.$$

L'asymptote est donc parallèle à l'axe des x
De plus, puisque $a = 0$,

$$\lim (y - ax) = \lim y = \lim m^x.$$

Pour $x = -\infty$, $\lim y = 0$, donc :

$$\lim (y - ax) \text{ ou } b = 0.$$

La direction négative de l'axe des x est donc l'asymptote de la courbe.

II. Soit la courbe dont l'équation est :

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Cette équation donne successivement :

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x^2}.$$

et pour $x = \infty$

$$\lim \frac{y}{x} \text{ ou } a = 0.$$

Puisque $a = 0$: $\lim (y - ax)$ devient :

$$\lim (y - ax) = \lim y = \lim \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Comme nous l'avons vu (page 40), cette courbe présente cette particularité qu'elle passe constamment au-dessus et au-dessous de l'axe des x , c'est-à-dire de son asymptote.

III. Soit la courbe dont l'équation est :

$$y^2 = \cos \frac{y}{x}.$$

Cette équation donne :

$$\frac{y}{x} = \arccos y^2.$$

La plus grande valeur d'un cosinus est l'unité, y ne dépassera donc pas 1; en sorte que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \arccos 1 = 0.$$

Donc $a = 0$, par suite :

$$b \text{ ou } \lim (y - ax) = \lim y.$$

Or :

$$\lim y^2 = 1.$$

donc :

$$\lim y = \pm 1.$$

d'où :

$$b = \pm 1.$$

La courbe a donc deux asymptotes dont les équations sont :

$$y = +1, \quad y = -1.$$

Les asymptotes de cette courbe sont donc deux parallèles à l'axe des x .

DÉTERMINATION DES ASYMPTOTES DES COURBES ALGÈBRIQUES.

Sont à déterminer les asymptotes d'une courbe, dont l'équation est $f(x, y) = 0$, la fonction $f(x, y)$ étant entière par rapport à x et y ; c'est-à-dire, que dans cette fonction les exposants de x et de y sont entiers et positifs.

Il s'agit dans cette équation, de déterminer les limites

$$\lim \frac{y}{x}, \quad \lim (y - ax).$$

Calcul du coefficient a . — Cherchons le rapport $\frac{y}{x}$ à cet effet, soit m le degré de la fonction $f(x, y)$; séparons les termes de cette fonction en groupes dont tous les termes seront respectivement des degrés $m, m-1, m-2, \dots$

Appelons :

$$\phi_m(x, y), \quad \phi_{m-1}(x, y), \quad \phi_{m-2}(x, y), \dots$$

les fonctions fournies par les divers groupes.

Alors nous aurons :

$$f(x, y) = \varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \varphi_{m-2}(x, y) + \dots = 0$$

Dans chacune des fonctions $\varphi_m(x, y)$, $\varphi_{m-1}(x, y)$, ... mettons respectivement x^m , x^{m-1} , x^{m-2} , ... en facteurs communs, les quotients par x^m , x^{m-1} , x^{m-2} , ... seront alors des fonctions du rapport $\frac{y}{x}$.

en effet, si je considère un terme de la fonction $\varphi_m(x, y)$, ce terme étant du degré m est de la forme $Ax^p \cdot y^{m-p}$; et si j'y mets x^m en facteur, j'obtiens :

$$Ax^p \cdot y^{m-p} = x^m \cdot A \frac{x^p \cdot y^{m-p}}{x^{m-p-m+p}} = x^m \cdot A \left(\frac{y}{x} \right)^{m-p}$$

Appelons donc :

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_2\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_3\left(\frac{y}{x}\right), \dots$$

les fonctions obtenues en mettant x^m , x^{m-1} , x^{m-2} , ... en facteurs communs dans les fonctions $\varphi_m(x, y)$, $\varphi_{m-1}(x, y)$, ... etc.; nous aurons :

$$(2) \quad x^m \cdot f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-2} f_3\left(\frac{y}{x}\right) + \dots = 0.$$

En divisant par x^m et en passant à la limite $x = \infty$ il vient :

$$f_1\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad f_1(a) = 0.$$

Telle est l'équation dont les racines seront les coefficients angulaires des asymptotes de la courbe proposée.

De là, cette règle :

Pour obtenir le coefficient angulaire de l'asymptote, réunissez sous les termes du même degré que celui de l'équation de la courbe, remplacez y par 1 et x par a et égalez à zéro. L'équation ainsi obtenue, a pour racine le coefficient angulaire de l'asymptote.

Remarque. — L'équation $f(x, y) = 0$ étant du degré m , la fonction $f_1(a)$ sera au plus du degré m , elle a donc au plus m racines réelles; c'est-à-dire, que si l'équation d'une courbe est du degré m , cette courbe a au plus m asymptotes.

Calcul du coefficient b . — L'équation de la courbe :

$$y = ax + b + \sqrt{\dots}$$

donne :

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b+V}{x}.$$

En portant cette valeur de $\frac{y}{x}$ dans l'équation (2), il vient :

$$x^n f_1\left(a + \frac{b+V}{x}\right) + x^{n-1} f_2\left(a + \frac{b+V}{x}\right) + x^{n-2} f_3\left(a + \frac{b+V}{x}\right) + \dots = 0$$

Et en développant d'après la série de Taylor :

$$\left. \begin{aligned} x^n f_1(a) + (b+V) f_1'(a) \\ + f_2(a) \end{aligned} \right\} x^{n-1} + P x^{n-2} + Q x^{n-3} + \dots = 0.$$

ou bien, puisque $f_1(a) = 0$.

$$[(b+V) f_1'(a) + f_2(a)] x^{n-1} + P x^{n-2} + Q x^{n-3} + \dots = 0.$$

divisons par x^{n-1} et passons à la limite $x = \infty$, nous aurons en remarquant qu'alors $V = 0$

$$b \cdot f_1'(a) + f_2(a) = 0.$$

d'où :

$$b = -\frac{f_2(a)}{f_1'(a)}.$$

Telle est la valeur de b . Cette valeur de b traduite en langage ordinaire, nous donne la règle suivante :

Pour calculer le coefficient linéaire de l'asymptote ; prenez le quotient en signe contraire de la fonction obtenue en groupant ensemble tous les termes d'un degré moindre d'une unité que celui de l'équation de la courbe, dans laquelle vous remplacez x par 1 et y par la racine de l'équation $f_1(a) = 0$ et que vous divisez par la dérivée du premier membre de cette équation.

Remarque. — La valeur de b est fournie par une équation du premier degré en b , donc à chaque valeur réelle de a correspond une seule valeur de b . Si l'équation $f_1'(a) = 0$ admet des racines égales, la courbe aura des asymptotes parallèles.

AUTRE MÉTHODE POUR DÉTERMINER L'ASYMPTOTE D'UNE COURBE QUELCONQUE.

L'asymptote peut être considérée comme la limite d'une tangente dont le point de contact avec la courbe, s'éloigne à l'infini.

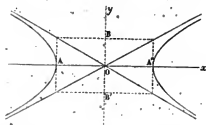
Par suite, l'équation de l'asymptote s'obtiendra, en supposant x' et y' infinies dans l'équation

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x').$$

laquelle est celle de la tangente au point x', y' de la courbe.

Afin de n'avoir qu'une seule variable, on remplacera dans cette équation y' par sa valeur tirée de l'équation de la courbe : puis après cette substitution, on fera $x' = \infty$.

Applications de cette méthode.



Soit à déterminer les asymptotes de l'hyperbole dont l'équation rapportée à ses axes et exprimée en fonction de ces axes est :

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -x^2 b^2.$$

La différentiation de cette équation donne :

$$2a^2 y \, dy - 2b^2 x \, dx = 0.$$

et par suite :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

L'équation de la tangente au point x', y' est donc :

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x').$$

Cette équation peut être simplifiée, car on en tire :

$$a^2 y' y - b^2 x' x = a^2 y'^2 - b^2 x'^2 \dots \dots (1),$$

et puisque le point x', y' est sur la courbe, on a :

$$a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2 \dots \dots (2),$$

l'équation (1) devient donc par substitution :

$$a^2yy' - b^2xx' = -a^2b^2.$$

Telle est l'équation simplifiée de la tangente au point x', y' .

Résolue par rapport à y , cette équation donne :

$$y = \frac{b^2 (xx' - a^2)}{a^2 y'} \dots \dots (3).$$

Portons dans cette équation (3) la valeur

$$y' = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

tirée de l'équation (2), nous aurons :

$$y = \pm \frac{b}{a} \frac{(xx' - a^2)}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Telle est l'équation de la tangente exprimée au moyen de l'abscisse x' du point de tangence.

Pour en déduire l'asymptote, il faut y faire $x' = \infty$. Avant d'établir cette hypothèse, divisons haut et bas par x' le second membre, nous aurons ainsi :

$$y = \pm \frac{b}{a} \frac{x - \frac{a^2}{x'}}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}};$$

et pour $x' = \infty$, il vient :

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

L'hyperbole a donc deux asymptotes dont les équations sont :

$$y = + \frac{b}{a} x, \quad y = - \frac{b}{a} x.$$

L'observation de ces équations montre que, dans l'hyperbole :

1° Les deux asymptotes passent par l'origine, c'est-à-dire par le centre de la courbe;

2° Les coefficients angulaires de ces asymptotes étant $+\frac{b}{a}$ et $-\frac{b}{a}$, ces asymptotes sont les diagonales du rectangle construit sur les axes AA' et BB' de la courbe.

Soit à déterminer l'asymptote de la parabole.

L'équation de cette courbe, rapportée à son axe, étant :

$$y^2 = 2px,$$

on en tire successivement :

$$2ydy = 2pdx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}.$$

L'équation de la tangente au point x', y' de cette courbe est donc :

$$y - y' = \frac{p}{y'} (x - x'),$$

ou bien :

$$yy' = px + y'^2 - px',$$

et puisque le point x', y' est sur la courbe $y'^2 = 2px'$ (1),

$$yy' = px + px',$$

$$yy' = p(x + x'),$$

par suite :

$$y = \frac{p}{y'} (x + x'),$$

et si l'on remplace y' par sa valeur $\sqrt{2px'}$ tirée de (1), il vient :

$$y = p \left(\frac{x + x'}{\sqrt{2px'}} \right).$$

Telle est, en fonction de l'abscisse x' du point de contact, l'équation de la tangente à la parabole.

La division haut et bas du second membre par x' donne :

$$y = p \frac{\frac{x}{x'} + 1}{\pm \sqrt{\frac{2p}{x'}}},$$

et pour $x' = \infty$, on trouve :

$$y = \pm \frac{p}{0} = \infty.$$

La parabole n'a donc pas d'asymptote, puisque l'équation

$$y = \pm \infty$$

que nous trouvons pour l'asymptote, indique deux parallèles à l'axe des x , situées à l'infini.

Remarque. — L'ellipse étant une courbe limitée ne peut avoir d'asymptote.

Donc, des trois courbes du deuxième degré, l'hyperbole seule a des asymptotes. On peut établir directement cette conclusion sur l'équation générale :

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0.$$

Appliquons à cette équation la détermination des asymptotes aux courbes algébriques :

Ici :

$$f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F \dots m = 2,$$

$$\varphi_m(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2,$$

$$\varphi_{m-1}(x, y) = Dy + Ex.$$

Pour avoir $f_1(a)$ et $f_2(a)$, il faut dans $\varphi_m(x, y)$ et $\varphi_{m-1}(x, y)$ remplacer x par 1, y par a , ce qui donne :

$$f_1(a) = Aa^2 + Ba + C \dots f_1'(a) = 2Aa + B,$$

$$f_2(a) = Da + E.$$

Les valeurs du coefficient angulaire sont les racines de l'équation $f_1(a) = 0$, c'est-à-dire ici :

$$Aa^2 + Ba + C = 0 \dots (1).$$

Les racines de cette équation ne sont réelles que pour $B^2 - 4AC > 0$. Ce qui n'exclut pas le cas où $B^2 - 4AC = 0$.

L'équation (1) donne :

$$a = -\frac{B}{2A} \pm \frac{1}{2A} \sqrt{B^2 - 4AC},$$

et en portant ces valeurs dans :

$$b = -\frac{f_2(a)}{f_1'(a)} = -\frac{Da + E}{2Aa + B},$$

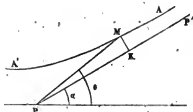
on trouve pour b deux valeurs finies, si $B^2 - 4AC > 0$, et deux valeurs infinies alors que $B^2 - 4AC = 0$.

On arrive donc ainsi à la conclusion établie ci-dessus, au sujet des asymptotes des courbes du deuxième degré.

Asymptotes aux courbes polaires.

Soit une courbe AA' dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = f(\theta).$$



Si une valeur α de θ , donne pour r une valeur infinie, on en conclura que le rayon vecteur correspondant à $\theta = \alpha$, ou une parallèle à ce rayon vecteur est asymptote de la courbe.

Pour reconnaître lequel du rayon vecteur ou de la parallèle à ce rayon est asymptote, prenons un point M de la courbe et abaissons la perpendiculaire MK sur le rayon recteur PP' correspondant à $\theta = \alpha$.

Le triangle rectangle MPK nous donne :

$$MK = r \sin(\theta - \alpha).$$

Pour $\theta = \alpha$, $r = \infty$ par hypothèse ; en sorte que pour $\theta = \alpha$, MK prend la forme $\frac{0}{0}$.

On cherchera la véritable valeur de l'expression $r \sin(\theta - \alpha)$ pour $\theta = \alpha$; trois cas pourront alors se présenter.

Où cette véritable valeur est nulle, finie ou infinie.

Si $\lim r \sin(\theta - \alpha)$ est nulle, limite de $MK = 0$; c'est dire que le rayon recteur PP' est asymptote.

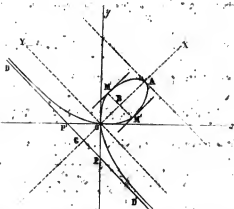
Si $\lim r \sin(\theta - \alpha)$ est finie, limite de MK est une quantité finie, h par exemple, c'est dire que la parallèle au rayon recteur, menée à une distance h de ce rayon, est asymptote (suivant que h est positif ou négatif, la parallèle doit être comptée au-dessus ou au-dessous du rayon recteur).

Enfin, si $\lim r \sin(\theta - \alpha)$ est infinie, on en conclut que la courbe n'a pas d'asymptote.

DE QUELQUES COURBES SUR LESQUELLES ON APPLIQUE LES THÉORIES PRÉCÉDENTES.

1. — Construire la courbe (dite *folium de Descartes*) dont l'équation est :

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$



L'observation de l'équation montre que :

1° la courbe passe par l'origine, puisque son équation est satisfaite pour $x = 0, y = 0$;

2° l'équation ne change pas alors qu'on y remplace x par y et y par x ; donc la courbe est symétrique par rapport à la bissectrice OX .

Donc, si l'on prend pour axes la bissectrice OX et la perpendiculaire OY sur OX ; puisque la courbe doit être symétrique par rapport à l'axe OX des x , il en résulte qu'une même valeur de x donnera pour y deux valeurs égales et de signes contraires. Par suite, l'équation proposée étant du troisième degré en x , par rapport aux axes rectangulaires yO, OX , ne devra contenir que des termes en y^2 ; lorsqu'on la rapportera aux axes rectangulaires YO, OX .

Cherchons cette équation transformée, afin de simplifier la discussion de la courbe.

A cet effet, prenons les formules :

$$\begin{aligned} x &= X \cos \alpha - Y \sin \alpha, \\ y &= X \sin \alpha + Y \cos \alpha, \end{aligned}$$

qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un autre système d'axes rectangulaires, sans changer d'origine. Puisque le nouvel axe OX des x , est la bissectrice de l'angle des axes : $\alpha = 45^\circ$, et les formules deviennent :

$$x = (X - Y) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = (X + Y) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

donc la courbe cherchée, rapportée aux axes $Y0$, OX , a pour équation :

$$(x + y)^3 \frac{\sqrt{2}}{4} + (x - y)^3 \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{3}{2} a (x^2 - y^2) = 0,$$

ou, plus simplement, après toutes réductions

$$(1) \dots\dots (3\sqrt{2}x + 3a)y^2 - (3a - x\sqrt{2})x^2 = 0.$$

Cette équation résolue par rapport à y donne :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{3a - \sqrt{2}x}{3\sqrt{2}x + 3a}}$$

ou bien :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\frac{3a}{\sqrt{2}} - x}{3\left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)}}$$

Sous cette forme, on voit bien que la courbe est symétrique par rapport à l'axe OX des x .

L'équation (1) différenciée donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\sqrt{2x - x^2 - y^2}}{(2x + a\sqrt{2})y} \dots\dots (u)$$

d'où, en remplaçant y^2 et y par leurs valeurs, sans s'occuper du double signe $\pm$ placé devant y :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a^2 - 2x^2}{(\sqrt{2}x + a) \cdot \sqrt{3(3a^2 - 2x^2 + 2a\sqrt{2}x)}}$$

Occupons-nous maintenant de la discussion de la courbe. Dans l'équation de cette courbe

$$y = \pm x \sqrt{\frac{\frac{3a}{\sqrt{2}} - x}{3 \cdot \left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)}}$$

on voit que : pour $x = 0$, $y = 0$; et, pour des valeurs positives de x moindres que $\frac{3a}{\sqrt{2}}$, y ne cesse d'être réelle. Pour $x = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, $y = 0$; et, au delà de cette valeur de x , y ne cesse d'être imaginaire.

Donc : si l'on prend sur OX une longueur $OA = \frac{3a}{\sqrt{2}}$, la courbe part de l'origine O et vient, symétriquement par rapport à OX , rejoindre OX en A , et ne dépasse pas A du côté des x positifs.

Forme de la courbe à l'origine.

La substitution de $x = 0$, dans $\frac{dy}{dx}$, donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3a^2}{3a^2} = 1.$$

Donc, à l'origine, la tangente est inclinée de 45° sur l'axe des x , c'est-à-dire que les anciens axes sont tangents à la courbe.

Forme de la courbe en A.

La substitution de l'abscisse $x = \frac{3a}{\sqrt{2}}$ du point A , dans $\frac{dy}{dx}$, donne :

$$\frac{dy}{dx} = \infty.$$

donc la courbe est perpendiculaire, en A , à l'axe OX .

Recherche du point maximum situé entre O et A .

Puisque la courbe rencontre l'axe OX en O et en A , il existe évidemment un point maximum dont l'abscisse est comprise entre O et

$$OA = \frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

Pour ce point $\frac{dy}{dx} = 0$, l'abscisse du point maximum sera donc donnée par l'équation :

$$3a^2 - 2x^2 = 0.$$

les racines de cette équation sont :

$$x' = -a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad x'' = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

La première racine, étant négative, ne peut convenir à la question ; la seconde, étant positive et $< OA$, convient seule.

Donc, si sur OA , on prend $OB = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$; on a en B l'abscisse du point maximum.

La substitution de $x = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}$ dans y , donne l'ordonnée du point maximum M .

Cherchons maintenant la portion de la courbe située du côté des x négatifs. A cet effet, remplaçons dans y , x par $-x$; l'équation devient alors :

$$y = \pm x \sqrt{\frac{3a}{\sqrt{2} + x}} \quad (2).$$

Le signe $\pm$ qui était devant y est devenu $\mp$; donc la branche de courbe $OM'A$, située du côté des x positifs et au-dessus de l'axe des x , passe au-dessous de cet axe, du côté des x négatifs ; au contraire, la branche $OM'A$, située du côté des x positifs et au-dessous de l'axe des x , passe au-dessus de cet axe, du côté des x négatifs.

Les valeurs données à x dans (2) doivent être comptées à gauche de l'origine.

Pour toute valeur de x moindre que $\frac{a}{\sqrt{2}}$, y ne cesse d'être réelle.

Pour $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \infty$, et au delà de cette valeur, y reste constamment imaginaire.

Donc si l'on prend :

$$OC = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3} OA.$$

et si l'on mène la perpendiculaire DD' à l'axe OX ; la courbe, partant de l'origine O , va rencontrer DD' à l'infini en restant symétrique par rapport à l'axe OX ; et au delà de DD' il n'y a aucun point de la courbe.

La droite DD' est donc une asymptote de la courbe.

Calcul direct de l'asymptote DD' .

Reprenons l'équation proposée :

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

rapportée aux axes yo, Ox .

Cette équation est du troisième degré, donc ici :

$$f_3(x, y) = x^3 + y^3, \quad f_{3-1}(x, y) = -3axy.$$

par suite :

$$f_1(k) = k^3 + 1, \quad f_2(k) = -3ak.$$

Le coefficient angulaire k de l'asymptote sera donc donné par l'équation :

$$k^3 + 1 = 0,$$

laquelle n'admet que la seule racine réelle, $k = -1$.

Le coefficient linéaire b de l'asymptote a pour expression :

$$b = -\frac{f_2(k)}{f_1(k)} = +\frac{3ak}{3k^2} = +\frac{a}{k},$$

et pour $k = -1$,

$$b = -a.$$

La courbe n'a donc qu'une seule asymptote dont l'équation est :

$$y = -x - a.$$

Remarque. — Sur la figure $OP = OP' = a$, et l'on voit aisément que

$$OC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Aire de la courbe. — Proposons-nous de calculer l'aire de la feuille OMAM'O. — A cet effet, reprenons l'équation de la courbe rapportée aux axes yO, Ox .

$$y^2 + x^2 - 3axy = 0.$$

Pour plus de simplicité, nous rapporterons la courbe à des coordonnées polaires, en prenant pour pôle l'origine O , et pour axe polaire l'axe Ox ; les formules de transformation sont alors :

$$x = r \cos \theta,$$

$$y = r \sin \theta.$$

L'équation exprimée en coordonnées polaires a donc pour expression :

$$r^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 3ar^2 \sin \theta \cos \theta = 0.$$

d'où

$$r = 3a \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta},$$

et en divisant, haut et bas, par $\cos^2 \theta$, il vient :

$$r = 3a \frac{\operatorname{tg} \theta \frac{1}{\cos^2 \theta}}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

or sur la figure, A , étant l'aire de la feuille OMAM'O, on a :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

La substitution de r , dans cette expression, donne :

$$A = \frac{9}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \dots (u)$$

et si l'on remarque que $\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = d \operatorname{tg} \theta$, on a successivement :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \theta d \operatorname{tg} \theta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} = \\
 &= \int \frac{3 \operatorname{tg}^2 \theta d \operatorname{tg} \theta}{3 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} = \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d \operatorname{tg}^2 \theta}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{d(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} \\
 &= \frac{1}{3} \int (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{-2} d(1 + \operatorname{tg}^2 \theta) \\
 &= \frac{1}{3} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} + C.
 \end{aligned}$$

Pour $\theta = 0$, ce résultat devient : $-\frac{1}{3} + C$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ ce résultat devient : $0 + C$.

Donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \theta \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)^2} = +\frac{1}{3}.$$

l'équation (u) donne alors par substitution :

$$A = \frac{3}{2} a^2.$$

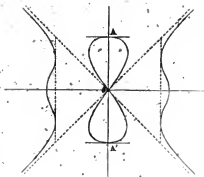
Telle est l'expression de l'aire de la feuille $\Theta M A M' O$.

II. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$y^4 - 96 a^2 y^2 + 100 a^2 x^2 - x^4 = 0.$$

L'inspection de cette équation montre que :

- 1° La courbe passe par l'origine.
- 2° Ne contenant que des puissances paires de x et de y , la courbe est symétrique par rapport aux deux axes coordonnés.
- 3° L'équation ne change pas alors qu'on y remplace x par $-x$ et y par $-y$; donc l'origine est le centre de la courbe.



L'équation résolue par rapport à y donne :

$$y = \pm \sqrt{48a^2} \pm \sqrt{1304a^4 - 100a^2x^2 + x^4}.$$

La décomposition de la fonction placée sous le second radical donne successivement :

$$\begin{aligned} x^4 - 100a^2x^2 + 1304a^4 &= (x^2 - 36a^2) \cdot (x^2 - 64a^2) = \\ &= (x - 6a) \cdot (x + 6a) \cdot (x - 8a) \cdot (x + 8a), \end{aligned}$$

donc :

$$y = \pm \sqrt{48a^2} \pm \sqrt{(x - 6a) \cdot (x + 6a) \cdot (x - 8a) \cdot (x + 8a)}.$$

Le signe $\pm$ placé devant le premier radical indique que la courbe est symétrique par rapport à l'axe des x . Nous ne nous en préoccupons pas.

Pour $x = 0$, on trouve pour y les valeurs :

$$y = 0, \quad y = 4a\sqrt{6}.$$

Si donc $OA = OA' = 4a\sqrt{6}$; l'origine et les deux points A et A' sont les deux points de la courbe situés sur l'axe des y .

Pour des valeurs de x comprises entre 0 et $6a$, on a pour y quatre valeurs réelles, égales, deux à deux et de signes contraires.

De $x = 6a$ à $x = 8a$, toutes les valeurs de y sont imaginaires; de $x = 8a$ à $x = 10a$, les quatre valeurs de y sont réelles; enfin de $x = 10a$ à $x = \infty$, deux valeurs de y seules sont réelles et vont indéfiniment en croissant.

Forme de la courbe à l'origine.

La différentiation de l'équation donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^4y}$$

Pour : $x=0$, $y=0$, $\frac{dy}{dx}$ devient $\frac{0}{0}$; au lieu de remplacer y par sa valeur, cherchons dans l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0 \dots\dots (1)$$

la limite du rapport $\frac{y}{x}$, pour $x=0$.

La division de (1) par x^2 , donne :

$$\left(\frac{y^2}{x^2}\right) y^2 - 96a^2 \frac{y^2}{x^2} + 100a^2 - x^2 = 0.$$

pour : $x=0$, $y=0$ cette équation devient :

$$96a^2 \text{ Lim } \left(\frac{y^2}{x^2}\right) - 100a^2 = 0$$

d'où :

$$\text{Lim } \left(\frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{25}{24}$$

et par suite :

$$\text{Lim } \frac{y}{x} = \pm \frac{5}{\sqrt{24}}$$

Donc les tangentes à l'origine ont pour équations :

$$y = \frac{5}{\sqrt{24}} x, \quad y = -\frac{5}{\sqrt{24}} x.$$

Points maximums.

Pour ces points $\frac{dy}{dx} = 0$, les abscisses de ces points sont donc données par l'équation :

$$x^3 - 50a^2x = 0.$$

d'où :

$$x = 0, \quad x = \pm 5a. \sqrt{2}.$$

Or $5a\sqrt{2}$ est plus grand que $6a$, et l'on sait que de $6a$ à $8a$ les valeurs de y sont imaginaires; la solution $x = 0$ convient donc seule pour les points maximums, donc les points A et A' sont les seuls points maximums de la courbe.

Recherche des asymptotes de la courbe.

En appliquant la méthode des asymptotes des courbes algébriques, à la courbe proposée dont l'équation

$$y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$$

est du quatrième degré, on a successivement :

$$\varphi_m(x, y) = y^4 - x^4, \quad \varphi_{m-1}(x, y) = 0, \\ f_1(k) = k^4 - 1 = 0, \quad f_2(k) = 0.$$

d'où les deux racines réelles $+1$ et -1 pour le coefficient angulaire K de l'asymptote; et, puisque le coefficient linéaire b est nul, la courbe proposée a deux asymptotes dont les équations sont :

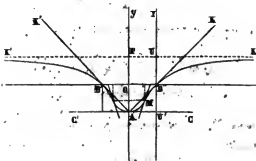
$$y = x, \quad y = -x.$$

Ces asymptotes sont les bissectrices des angles des axes.

La courbe proposée a la forme indiquée sur la figure..

III. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$



L'équation proposée ne change pas, alors qu'on y remplace x par $-x$, la courbe cherchée est donc symétrique par rapport à l'axe des y .

Pour $x = 0$, $y = -1$.

Si donc $OA = 1$, le point A est un point de la courbe.

Pour des valeurs de $x < 1$; y ne cesse d'être négatif, pour $x = 1$, $y = 0$ donc si $OB = OB' = 1$, les points B et B' sont des points de la courbe.

Au delà de $x = 1$, y devient positif; donc la courbe à partir des points B et B' passe au-dessus de l'axe des x .

La valeur de y peut s'écrire ainsi :

$$y = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

sous cette forme, on voit que pour des valeurs croissantes de x , y s'approche de l'unité et pour $x = \infty$, $y = 1$; donc si l'on mène la parallèle KK' à l'axe des x à la distance $OP = 1$, la courbe va rencontrer cette parallèle à l'infini.

La droite KK' est asymptote de la courbe.

Forme de la courbe aux points A, B et B'.

La différentiation de l'équation de la courbe donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Au point A : $x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$, la courbe est donc tangente en A, à la parallèle CC' menée à l'axe des x .

Au point B : $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 1$.

Au point B' : $x = -1$, $\frac{dy}{dx} = -1$.

La courbe, en B et en B', est donc tangente aux droites AB et AB'.

Le point A est évidemment un point *maximum*.

Recherches des points d'inflexion.

L'équation de la courbe donne :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

Pour les points d'inflexion : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; donc ici il existe deux points

d'inflexion dont les abscisses sont données par l'équation :

$$1 - 3x^2 = 0.$$

Les coordonnées des points d'inflexion sont donc :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \sqrt{3}. \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \sqrt{3}. \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Au premier point d'inflexion M, la tangente a pour inclinaison $\frac{3}{4}\sqrt{3}$.

Recherche directe de l'asymptote KK'.

L'équation de la courbe, mise sous la forme :

$$y = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

donné :

$$\frac{y}{x} = \frac{x - \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

et pour $x = \infty$

$$\lim \frac{y}{x} = 0.$$

L'asymptote est donc parallèle à l'axe des x .

Cherchons maintenant le coefficient linéaire b de l'asymptote.

On a : $b = \lim (y - ax)$. Puisque $a=0$, cela revient à chercher $\lim y$ pour $x = \infty$. Or $\lim y = 1$, l'asymptote de la courbe a donc pour équation $y = 1$. Ainsi nous retrouvons KK'.

Aire de la courbe.

A étant l'aire de la courbe comprise entre l'axe des x et l'arc BAB', on a :

$$A = 2 \int_0^{+\infty} y dx.$$

La substitution de y donne successivement :

$$\int y \cdot dx = \int \frac{(x^2-1) dx}{x^2+1} = \int \frac{(x^2+1) dx}{x^2+1} - 2 \int \frac{dx}{1+x^2} \\ = x - 2 \operatorname{arc} \lg x + C.$$

pour $x = 0$, cette intégrale devient C .

pour $x = 1$, elle devient : $1 - \frac{\pi}{2} + C$.

Donc :

$$\int_0^1 y \, dx \text{ ou } A = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Remarque I. — L'aire $\frac{\pi}{2}$ représente la surface du demi-cercle décrit sur BB' comme diamètre; donc la surface de la courbe $B'AB$ est égale à celle du demi-cercle, moins le carré du rayon OA , c'est-à-dire que l'aire comprise entre le demi-cercle et l'arc BAB' est commensurable.

Remarque II. — Proposons-nous de calculer l'aire de la courbe comprise entre la parallèle UK , à l'axe des x , la parallèle BU à l'axe des y et la branche infinie qui part de B .

A cet effet, transportons les axes parallèlement à eux-mêmes au point U dont les coordonnées sont $x = 1$, $y = 1$.

Rapportée aux-nouveaux axes YU , UK l'équation de la courbe devient :

$$y + 1 = \frac{(x + 1)^2 - 1}{(x + 1)^2 + 1}.$$

ou plus simplement :

$$y = -\frac{2}{(x + 1)^2 + 1}.$$

L'aire cherchée a pour expression :

$$\int_0^{\infty} y dx = \int_0^{\infty} \frac{2 dx}{(x + 1)^2 + 1} = 2 \int_0^{\infty} \frac{d(x + 1)}{1 + (x + 1)^2}.$$

or :

$$\int \frac{d(x + 1)}{1 + (x + 1)^2} = \operatorname{arc} \lg(x + 1) + C.$$

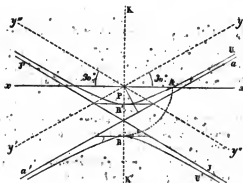
et puisque pour $x = \infty$, $\operatorname{arc} \lg \infty = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\int_0^{\infty} y dx = \pi.$$

L'aire de la courbe comprise entre UK, BU et la branche infinie qui part de B est donc finie. Cette aire est égale à celle du cercle décrit sur BB' comme diamètre.

IV. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}.$$



Cette équation ne contient l'angle θ que par son sinus, il en résulte que la courbe qu'elle représente est symétrique par rapport à la perpendiculaire KK' menée au pôle sur l'axe polaire Px.

Il suffira donc de donner à θ des valeurs de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et de $\frac{3}{2}\pi$ à 2π .

Pour $\theta = 0$, $r = 1$; si donc PA = 1, A est un point de la courbe.

Pour des valeurs de θ , comprises entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, r croît positivement de 1 à l'infini.

Pour $\theta = \frac{\pi}{6}$, $r = \infty$.

Si donc on fait en P un angle $yPx = 30^\circ$, il s'agit de savoir laquelle des droites Py ou une parallèle à Py, est asymptote de la courbe.

Cherchons donc la limite de l'expression $r \sin (\theta - 30^\circ)$ pour $\theta \approx 30^\circ$; on a :

$$r \sin (\theta - 30^\circ) = \frac{\sin (\theta - 30^\circ)}{1 - 2 \sin \theta}.$$

Pour $\theta = 30^\circ$, le second membre devient $\frac{0}{0}$; en appliquant ici la règle connue pour la recherche des expressions de ce genre, on trouve :

$$\lim [\dot{r} \sin(\theta - 30^\circ)] = \frac{\cos(\theta - 30^\circ)}{-2 \cos 30^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Donc : si sur Py et au-dessous de cette ligne, on mène à cette ligne la parallèle aa' distante de $\frac{1}{\sqrt{3}}$, la droite aa' est une asymptote de la courbe.

Au delà de $\theta = \frac{\pi}{6}$, r devient négatif, les points correspondants de la courbe seront donc situés dans l'angle $y'PK'$, nous n'avons pas à nous en occuper, puisque nous l'avons dit plus haut, il suffit de déterminer les points de la courbe, situés à droite de la perpendiculaire KK' .

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = -1$; donc en prenant $PB = 1$, on a en B un point de la courbe, ce point appartient à la branche située dans l'angle $y'PK'$.

De $\theta = \frac{\pi}{2}$ à $\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, r est négatif et les points correspondants de la courbe sont situés dans l'angle xPy'' .

Pour $\theta = \pi - \frac{\pi}{6}$, $\sin \theta = \frac{1}{2}$, $r = \infty$, et l'on trouve comme précédemment que la parallèle JJ' , menée à Py'' , au-dessous de cette ligne et à une distance égale à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, est asymptote de la courbe.

De $\pi - \frac{\pi}{6}$ à π , r redevient positif et les points correspondants de la courbe sont situés dans l'angle $y'''Px$; nous n'avons pas à nous en occuper.

De $\frac{3}{2}\pi$ à 2π , θ est négatif et r devient

$$r = \frac{1}{1 + 2 \sin \theta}.$$

Pour $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $r = \frac{1}{3}$; si donc l'on prend $OB' = \frac{1}{3}$, on a en B' un point de la courbe; θ croissant de $\frac{3}{2}\pi$ à 2π , r croît de $\frac{1}{3}$ à 1; la courbe revient ainsi en A .

A droite de KK' , on a les deux branches de courbe $B'AU$ et BU' .

La courbe totale se compose donc des deux branches infinies tracées sur la figure.

Cette courbe est une hyperbole équilatère dont l'un des foyers est le pôle.

Forme de la courbe en B et en B'.

L'équation proposée donne par la différentiation :

$$\frac{r \cdot d\theta}{dr} \text{ ou } \operatorname{tg} V = \frac{1 - 2 \sin \theta}{2 \cos \theta}.$$

Au point B, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\cos \theta = 0$, $\operatorname{tg} V = \infty$; en B', $\theta = \frac{3}{2}\pi$, $\cos \theta = 0$, $\operatorname{tg} V = \infty$.

Donc, en ces points, les tangentes sont perpendiculaires aux rayons vecteurs, c'est-à-dire que les tangentes, en ces points, sont parallèles à l'axe polaire.

Aire de la courbe.

L'aire A d'une courbe exprimée en coordonnées polaires a pour expression $A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$, et, puisque ici $r = \frac{1}{1 - 2 \sin \theta}$, il s'agit de calculer :

$$\int \frac{d\theta}{(1 - 2 \sin \theta)^2}.$$

A cet effet, posons $\theta = 90^\circ - \varphi$; alors $d\theta = -d\varphi$, par suite

$$\int \frac{d\theta}{(1 - 2 \sin \theta)^2} = - \int \frac{d\varphi}{(1 - 2 \cos \varphi)^2}. \quad (1)$$

Soit $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$; d'où :

$$\frac{1}{2} \frac{d\varphi}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = dz, \quad \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{1 + z^2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{z^2}{1 + z^2}$$

et par suite :

$$d\varphi = \frac{2dz}{1 + z^2}, \quad \cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}.$$

L'équation (1) devient donc, par substitution,

$$\int \frac{dz}{(1-2\sin\theta)^2} = - \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{(1-2\frac{1+z^2}{1+z^2})^2} = - \int \frac{2(1+z^2) dz}{(3z^2-1)^2}.$$

et, si l'on pose $z = \frac{u}{\sqrt{3}}$, d'où $dz = \frac{du}{\sqrt{3}}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{(1-2\sin\theta)^2} &= - \int \frac{\frac{2}{3\sqrt{3}}(3+u^2)du}{(u^2-1)^2} = - \\ &= - \frac{2}{3\sqrt{3}} \int \frac{(3+u^2)du}{(u^2-1)^2}. \end{aligned}$$

La question revient donc à intégrer $\int \frac{(3+u^2)du}{(u^2-1)^2}$; nous allons remplacer l'expression fractionnaire $\frac{(3+u^2)}{(u^2-1)^2} = \frac{(3+u^2)}{(u-1)^2(u+1)^2}$ en une somme de fractions rationnelles : à cet effet, posons :

$$\frac{3+u^2}{(u-1)^2(u+1)^2} = \frac{A}{(u-1)^2} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{(u+1)^2} + \frac{D}{u+1}, \quad (m).$$

A, B, C, D étant des nombres indéterminés.

En réduisant au même dénominateur, il vient :

$$3+u^2 = A(u-1)^2 + B(u-1)(u+1)^2 + C(u+1)^2 + D(u-1)(u+1)^2;$$

ou bien :

$$3+u^2 = A(u-1)^2 + B(u^2-1)(u-1) + C(u+1)^2 + D(u^2-1)(u+1).$$

et en effectuant les calculs indiqués, puis faisant tout passer dans le second membre :

$$+ D \left| \begin{array}{r} u^2 + A \\ - B \\ + C \\ + D \\ - 1 \end{array} \right| u^2 - 2A \left| \begin{array}{r} u + A \\ + B \\ + C \\ - D \\ - 3 \end{array} \right| = 0.$$

Cette équation doit être satisfaite, quelle que soit la valeur donnée à u ; donc, pour déterminer A, B, C, D , on a les relations :

$$B + D = 0 \quad (\alpha).$$

$$A - B + C + D - 1 = 0 \quad (\beta).$$

$$-2A - B + 2C - D = 0 \quad (\gamma).$$

$$A + B + C - D - 3 = 0 \quad (\delta).$$

On en tire :

$$A = C, \text{ à cause de } (\alpha) \text{ et de } (\gamma) \dots\dots (1)$$

L'addition et la soustraction de (β) et de (δ) donnent, à cause de (1) :

$$4A - 4 = 0. \quad A = 1, C = 1.$$

$$2B - 2D - 2 = 0. \quad B - D - 1 = 0.$$

et à cause de (α) :

$$B = \frac{1}{2}, D = -\frac{1}{2}.$$

La substitution des valeurs de A, B, C, D dans (m) donne :

$$\frac{3 + u^2}{(u-1)^2(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} + \frac{1}{(u-1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{u-1}.$$

et par suite :

$$\begin{aligned} \int \frac{(3 + u^2) du}{(u-1)^2(u+1)^2} &= \int \frac{du}{(u+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u+1} + \int \frac{du}{(u-1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u-1} \\ &= \int \frac{d(u+1)}{(u+1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(u+1)}{u+1} + \int \frac{d(u-1)}{(u-1)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(u-1)}{u-1} \\ &= \int (u+1)^{-2} d(u+1) + \frac{1}{2} \log(u+1) + \\ &\quad + \int (u-1)^{-2} d(u-1) - \frac{1}{2} \log(u-1) \\ &= -\frac{2u}{u^2-1} + \frac{1}{2} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + C. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int \frac{d\theta}{(1-2\sin\theta)^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[\frac{2u}{(u^2-1)} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{u+1}{u-1} \right) + C \right].$$

Et, puisque :

$$z = \frac{u}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z, \quad \varphi = 90^\circ - \theta$$

on tire :

$$u = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right).$$

On a donc finalement :

$$\int \frac{d\theta}{(1-2\sin^2\theta)^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left[\frac{2\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right)}{3 \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) - 1} - \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) + 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\theta}{2} \right) - 1} \right) + C \right].$$

Cette formule permettra d'achever la détermination complète de l'aire de la courbe.

Remarque. — On trouverait plus aisément l'aire de la courbe $r = \frac{1}{1-2\sin\theta}$, en rapportant cette courbe à des coordonnées rectilignes. En prenant l'axe polaire pour axe des x , et la perpendiculaire élevée au pôle sur cet axe, pour axe des y ; la courbe proposée a pour équation :

$$3y^2 - x^2 + 4y + 1 = 0.$$

V. Construire la courbe représentée par l'équation :

$$r = \frac{a \cos 2\theta}{\sin \theta}.$$

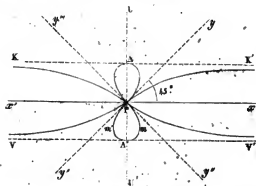
Pour $\theta=0$, $r=\infty$; il s'agit de savoir si c'est l'axe polaire Px , ou une parallèle à cet axe, qui est asymptote de la courbe.

A cet effet, cherchons $\lim r \sin \theta$, pour $\theta=0$; on a :

$$\lim r \sin \theta = \lim a \cos 2\theta = a, \text{ pour } \theta=0:$$

si donc, au-dessus de l'axe polaire et parallèlement à cet axe, on mène la parallèle KK' à la distance $PA = a$, la droite KK' est asymptote de la courbe.

Pour des valeurs croissantes de θ , comprises entre 0 et 45° , r va en diminuant et en restant positif; pour $\theta = 45^\circ$, $\cos 2\theta = 0$, $r = 0$. La courbe passe donc en P.



De 45° à 90° , $\cos 2\theta$ devient négatif, $\sin \theta$ est positif, le rayon vecteur est donc négatif, il est croissant en valeur absolue; donc, de 45° à 90° , la courbe passe au-dessous de l'axe polaire et se trouve dans l'angle $U'Py'$; pour $\theta = 90^\circ$, $\cos 2\theta = -1$, $r = -a$; si donc, l'on prend $PA' = PA$ on a en A' un point de la courbe.

De $\theta = 90^\circ$ à $\theta = 90^\circ + 45^\circ$, $\cos 2\theta$ est négatif, $\sin \theta$ est positif; donc, la courbe reste au-dessous de l'axe polaire et entre ces limites, elle se trouve comprise dans l'angle $U'Py''$. Le rayon vecteur décroît en valeur absolue et pour $\theta = 90^\circ + 45^\circ$, $\cos 2\theta = 0$, $r = 0$; la courbe repasse donc au pôle.

Pour des valeurs de θ comprises entre $90^\circ + 45^\circ$ et 180° , $\cos 2\theta$ redevient positif, $\sin \theta$ est aussi positif, le rayon vecteur l'est donc aussi; entre ces limites, il est croissant et pour $\theta = 180^\circ$, $r = \infty$. La courbe est donc comprise dans l'angle $y''Px'$, et l'on voit, comme ci-dessus, qu'elle est asymptote de la parallèle KK' .

De $\theta = 180^\circ$ à $\theta = 360^\circ$, $\cos 2\theta$ va repasser par les mêmes valeurs que nous venons de considérer, $\sin \theta$ reprend aussi les mêmes valeurs absolues négatives. On retrouve donc de 180° à 360° la même courbe, seulement elle se trouve symétriquement placée par rapport à l'axe polaire; cette nouvelle branche passe en A et elle a deux branches infinies asymptotes de la parallèle VV' , menée par A' à l'axe polaire.

Forme de la courbe au pôle P, en A' et en A.

L'équation de la courbe donne par différentiation :

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dr} &= -\frac{1}{a} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta \cdot \cos 2\theta + 2 \sin \theta \cdot \sin 2\theta} = - \\ &= -\frac{1}{a} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta \cdot \sin 2\theta}\end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{rd\theta}{dr} \text{ ou } \operatorname{tg} V = -\frac{\sin \theta \cos 2\theta}{\cos \theta + \sin \theta \sin 2\theta}$$

Au pôle P, $\theta = 45^\circ$, $\operatorname{tg} V = 0$; donc, au pôle, la courbe est tangente à la bissectrice Py de l'angle APx.

En A', $\theta = 90^\circ$, $\cos 2\theta = -1$, $\cos \theta = 0$, $\sin 2\theta = 0$; par suite, $\operatorname{tg} V = \infty$, la courbe est donc en A', tangente à la parallèle VV', menée à l'axe polaire.

De même, la courbe est tangente en A à la parallèle U'U'. La courbe a donc la forme indiquée sur la figure

Le pôle est un point multiple et chacune des quatre branches qui y passent est respectivement tangente aux droites yy', y''y'''.

Aire de la courbe.

Proposons-nous de calculer l'aire A du folium PmA'm'P ; cette aire sera donnée par l'expression :

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 d\theta$$

car sur la figure aire PmA'm'P = 2. aire PmA'.

Cherchons d'abord l'intégrale indéfinie :

$$\int r^2 d\theta = a^2 \int \frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2 \theta} d\theta \dots \dots \dots (m).$$

à cet effet, on a successivement :

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2 \theta} d\theta &= \int \frac{(1 - \sin^2 2\theta)}{\sin^2 \theta} d\theta = \\ &= \int \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} - \int \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 \theta} d\theta = \\ &= -\cot \theta - \int \frac{4 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot d\theta}{\sin^2 \theta} = \\ &= -\cot \theta - 4 \int \cos^2 \theta \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Mais on a trouvé (intég. III, page 169) :

$$\int \cos^2 \theta \cdot d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta + \frac{\theta}{2}.$$

donc par substitution :

$$\int \frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2 \theta} d\theta = -\cot \theta - 2 \sin \theta \cdot \cos \theta - 2\theta + C.$$

et en portant cette valeur dans (m) il vient :

$$\int r^2 d\theta = -a^2 \left[\cot \theta + \sin 2\theta + 2\theta \right] + C.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, cette intégrale devient :

$$-a^2 \left(1 + 1 + \frac{\pi}{2} \right) + C.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette intégrale devient :

$$-a^2 + C.$$

Par suite :

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

Telle est l'expression de l'aire cherchée.

DU CENTRE DES COURBES.

On appelle *centre* d'une courbe, un point tel que toute sécante passant par ce point, rencontre la courbe en des points qui sont deux à deux équidistants de ce point.

Il résulte de cette définition que si l'origine des coordonnées est placée au centre d'une courbe quelconque, l'équation de la courbe ne sera pas altérée lorsqu'on y remplacera respectivement x et y par $-x$ et par $-y$.

En effet, soit une corde MM' d'une courbe passant par le centre O de cette courbe ; le point O est supposé l'origine des coordonnées.

Puisque O est le centre de la courbe, on a :

$$MO = OM'.$$

Par suite, les triangles MOP , $M'OP$ sont égaux comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux ; donc :

$$MP = M'P, \quad OP = OP.$$

Les coordonnées du point M' sont donc égales à celles du point M , et elles sont de signes contraires.

Donc, si x, y sont les coordonnées du point M , $-x$ et $-y$ sont celles de M' ; et puisque M et M' sont deux points de la courbe, les coordonnées x, y et $-x, -y$ satisferont à l'équation de cette courbe.

La réciproque est vraie ; c'est-à-dire que :

Si l'équation d'une courbe ne change pas alors qu'on y remplace x et y par $-x$ et par $-y$, l'origine est le centre de la courbe.

Donc pour obtenir les coordonnées inconnues a et b du centre d'une courbe, dont l'équation est $f(x, y) = 0$, nous transporterons les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont a et b ; l'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes sera

$$f(x + a, y + b) = 0.$$

On profitera de l'indétermination des quantités a et b , pour faire disparaître les termes du degré impair si l'équation est de degré pair ou les termes de degré pair si l'équation est de degré impair.

Les équations de condition ainsi déterminées feront connaître a et b .

La courbe proposée aura donc un centre, ou n'en aura pas, suivant

que l'on pourra tirer de ces équations des valeurs réelles et finies pour a et b , ou que les équations de condition seront incompatibles.

Si les équations sont indéterminées, il y aura une infinité de centres.

Il résulte de ces considérations que si l'équation d'une courbe est de degré impair, son centre, s'il y en a un, se trouve sur cette courbe, car l'équation ne devra pas contenir de terme indépendant des variables x et y .

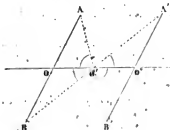
Ainsi, la courbe $y = x^3$ a pour centre l'origine.

En appliquant la marche que nous venons d'indiquer pour déterminer le centre, aux courbes du deuxième degré, on a vu que parmi ces courbes, l'ellipse et l'hyperbole seules ont un centre.

Si une courbe a deux centres, elle en a une infinité, tous situés sur la ligne qui joint ces deux centres.

Supposons que O et O' soient deux centres d'une même courbe. Menons une sécante quelconque AB , par le premier centre O ; alors $AO = OB$, et si l'on joint $A'O'$ et $B'O'$ et que l'on prolonge de telle sorte que l'on ait :

$$O'A' = O'B, \quad O'B' = O'A.$$



Les points A' et B' , appartiennent à la courbe, puisque O' est aussi un autre.

En joignant $A'B'$ on obtient donc une corde quelconque de la courbe et puisque cette corde est divisée en O'' en deux parties égales, il en résulte que le troisième point O'' est aussi un centre de la courbe.

Des centres O et O' ou des centres O' et O'' , on déduira un qua-

trième centre et ainsi de suite.

Remarquons ici que, dans ce cas, on trouve une infinité de points de la courbe, situés sur les deux parallèles AA' et BB' menées à la ligne qui joint les centres.

D'où il résulte que : les courbes algébriques ne peuvent avoir qu'un centre, car une courbe algébrique ne peut être rencontrée par une ligne droite qu'en un nombre déterminé de points (autant de points qu'il y a d'unités dans le degré de son équation).

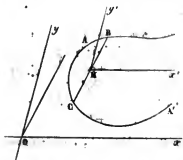
La courbe transcendante $y = \sin x$, a une infinité de centres, lesquels

sont sur l'axe des x , aux points dont les abscisses sont $x = K\pi$ et le lieu de ses points maximum forme l'ensemble de deux droites parallèles à la ligne des centres.

DES DIAMÈTRES D'UNE COURBE.

Par *diamètre d'une courbe*, on entend le lieu géométrique des milieux des cordes de cette courbe, parallèles à une direction donnée.

Chercher le diamètre d'une courbe, c'est résoudre la question suivante :



La direction m d'une droite $y = mx + n$ et l'équation $f(x, y) = 0$ d'une courbe, étant données ; trouver le lieu des milieux de toutes les cordes de la courbe, parallèles à la direction donnée.

Soit AA' la courbe dont l'équation est $f(x, y) = 0$; soit BC une corde de cette courbe parallèle à la direction donnée.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point

milieu M de cette corde, l'équation de la courbe rapportée aux nouveaux axes est

$$f(x + x', y + y') = 0.$$

x' et y' représentant les coordonnées du point milieu M . L'équation de la corde BC est alors $y = mx$, puisque M est l'origine.

Les coordonnées des points B et C d'intersection de la courbe $f(x + x', y + y') = 0$ et de la droite $y = mx$ sont donc égales et de signes contraires puisque M est l'origine.

Ces coordonnées sont données par la résolution des équations :

$$f(x + x', y + y') = 0.$$

$$y = mx$$

L'élimination de y entre ces deux équations donne l'équation :

$$f(x + x', mx + y') = 0.$$

laquelle a pour racines les abscisses des points B et C ; si l'on y exprime que les racines sont égales et de signes contraires, on arrivera à

une équation ne contenant que x' , y' et m

$$\varphi(x', y', m) = 0.$$

laquelle est une relation entre les coordonnées du point milieu d'une corde quelconque parallèle à la direction m .

Cette équation est donc celle du diamètre cherché.

DES DIAMÈTRES DES COURBES DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Soit :

$$f(x, y) = ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0.$$

Alors :

$$f(x+x', m x+y') = am^2 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + (2ay' + bx' + d)m \\ + by' + 2cx' + e \\ + f \end{array} \right\} + bm \left\{ \begin{array}{l} x + ay'^2 \\ + bx'y' \\ + cx'^2 \\ + dy' \\ + ex' \\ + f \end{array} \right\} = 0 \dots (1)$$

Pour que les racines de cette équation (1) soient égales et de signes contraires, il faut que l'on ait :

$$(2ay' + bx' + d)m + by' + 2cx' + e = 0.$$

L'équation des diamètres des cordes parallèles à la direction m est donc

$$(2ay + bx + d)m + by + 2cx + e = 0 \dots (2)$$

Cette équation est du premier degré; donc :

Les diamètres des courbes du deuxième degré sont des lignes droites, en nombre illimité car m est arbitraire.

L'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$m \cdot \frac{df}{dy} + \frac{df}{dx} = 0 \dots (3)$$

Cette équation est donc satisfaite pour les valeurs de x et de y , tirées des équations :

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0$$

lesquelles donnent les coordonnées du centre. Donc :

Les diamètres des courbes du deuxième degré passent tous par le centre.

L'équation (3) donne :

$$m = - \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} = \frac{dy}{dx}.$$

Donc : la tangente à une courbe du deuxième degré est parallèle aux cordes que ce diamètre divise en parties égales.

En mettant l'équation du diamètre sous la forme $y = ax + b$, on trouve que son coefficient angulaire λ est :

$$\lambda = - \frac{bm + 2c}{2am + b}.$$

Dans le cas de la parabole, $b^2 - 4ac = 0$, d'où $2c = \frac{b^2}{2a}$; en sorte que pour les diamètres de cette courbe, on a :

$$\lambda = - \frac{bm + \frac{b^2}{2a}}{2am + b} = - \frac{b}{2a}.$$

Donc : les diamètres de la parabole sont parallèles.

DES DIAMÈTRES CONJUGUÉS DANS LES COURBES DU DEUXIÈME DEGRÉ.

Soient m et m' les directions des cordes que divisent en parties égales deux diamètres et soit λ le coefficient angulaire du premier diamètre ; alors :

$$\lambda = - \frac{bm + 2c}{2am + b}.$$

Si ces diamètres sont conjugués, c'est-à-dire, si l'un est parallèle aux cordes que l'autre divise en parties égales, et réciproquement, $\lambda = m'$ et l'on a :

$$m' = - \frac{bm + 2c}{2am + b}.$$

d'où :

$$2am'm' + b(m + m') + 2c = 0.$$

Telle est la relation qui existe entre les directions de deux diamètres conjugués. Cette relation étant unique entre m et m' , il en résulte que les courbes du deuxième degré, à l'exclusion de la parabole, ont une infinité de diamètres conjugués. Ce que l'on savait déjà.

DES AXES, DANS LES COURBES DU DEUXIÈME DEGRÉ.

On appelle *axe d'une courbe*, le diamètre de cette courbe perpendiculaire aux cordes parallèles qu'il divise en parties égales.

Si un diamètre dont la direction λ , est perpendiculaire aux cordes parallèles, de direction m , qu'il divise en parties égales; on a, en supposant les axes rectangulaires :

$$\lambda m + 1 = 0.$$

ou bien :

$$\left(-\frac{bm + 2c}{2am + b}\right) m + 1 = 0.$$

et par suite :

$$bm^2 - 2(a - c)m - b = 0 \dots\dots (u)$$

Telle est l'équation dont les racines sont les directions des cordes que les axes divisent en parties égales. Cette équation ayant ses racines réciproques et de signes contraires, on peut la considérer comme ayant pour racines les directions des axes.

Donc : les courbes du deuxième degré n'ont que deux axes lesquels se coupent à angle droit.

La parabole n'a qu'un axe dont l'équation est :

$$y = -\frac{b}{2a}x - \frac{bc + 2ad}{b^2 + 4a^2}$$

En effet, si $b^2 - 4ac = 0$, les racines de l'équation (u) sont $-\frac{b}{2a}$ et $\frac{2a}{b}$ et la première de ces racines rend infinie l'ordonnée à l'origine du second axe.

CONTACT DES COURBES PLANES.

Définition des infiniment petits de divers ordres.

Si l'on considère plusieurs infiniment petits dépendant les uns des autres, de telle sorte que l'un étant déterminé, tous les autres le soient, et que l'on en prenne un en particulier pour y rapporter tous les autres, on appelle : *infiniment petits du premier ordre*, ceux dont les rapports avec

celui-là auront des limites finies; *infinitement petits du second ordre*, ceux dont les rapports avec le même infinitement petit principal seront des infinitement petits du premier ordre; *infinitement petits du troisième ordre*, ceux dont les rapports avec l'infinitement petit principal seront des infinitement petits du second ordre; et en général, on appellera *infinitement petits de l'ordre n* , ceux dont les rapports avec l'infinitement petit principal seront des infinitement petits de l'ordre $n - 1$.

Il est facile d'exprimer les infinitement petits de divers ordres au moyen de l'infinitement petit principal.

En effet, désignons par α l'infinitement petit principal; soit ζ un infinitement petit du premier ordre; par définition, la limite du rapport $\frac{\zeta}{\alpha}$ est une quantité finie, que nous appellerons K , en sorte que l'on a :

$$\frac{\zeta}{\alpha} = K + \omega.$$

ω tendant vers zéro en même temps que α .

L'expression de tout infinitement petit du premier ordre sera donc de la forme

$$\alpha (K + \omega).$$

ω étant infinitement petit et K étant une quantité finie.

Soit γ un infinitement petit du second ordre, le rapport de γ à l'infinitement petit principal α devant être du premier ordre, on aura :

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \alpha (K + \omega).$$

d'où :

$$\gamma = \alpha^2 (K + \omega).$$

L'expression de tout infinitement petit du second ordre sera donc de la forme :

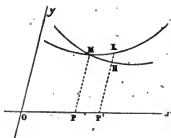
$$\alpha^2 (K + \omega).$$

En continuant ainsi, on reconnaît que la forme générale des infinitement petits de l'ordre n est :

$$\alpha^n (K + \omega).$$

ω étant infinitement petit, et K étant une quantité finie.

Théorie des contacts.



Soient deux courbes dont les équations sont :

$$y = f(x) \text{ et } Y = F(x);$$

supposons que ces courbes se coupent en un point M, dont l'abscisse est $x = 0P$.

Soit $\varphi(x)$ la différence

$$f(x) - F(x).$$

Pour un accroissement Δx de x , on a sur la figure :

$$KH = y - Y = f(x + \Delta x) - F(x + \Delta x) = \varphi(x + \Delta x).$$

et d'après la série de Taylor :

$$\begin{aligned} KH = \varphi(x) + \Delta x \cdot \varphi'(x) + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^n(x) + \\ + \frac{\Delta x^{n+1}}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} \varphi^{n+1}(x) + \varepsilon \Delta x^{n+2}. \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} KH = \varphi(x) + \Delta x \cdot \varphi'(x) + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} \varphi''(x) + \dots + \frac{\Delta x^n}{1 \cdot 2 \dots n} \varphi^n(x) + \\ + \Delta x^{n+1} \left(\frac{\varphi^{n+1}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} + \varepsilon \Delta x \right). \end{aligned}$$

Par définition : on dit que deux courbes ont un contact de l'ordre n , en un point lorsque la différence KH de leurs ordonnées est un infiniment petit de l'ordre $n + 1$ dans le voisinage de ce point. Il faut donc que la différence KH de leurs ordonnées se réduise à :

$$KH = \Delta x^{n+1} \left(\frac{\varphi^{n+1}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)} + \varepsilon \Delta x \right)$$

et cela quel que soit Δx ; puisque Δx est ici un infiniment petit principal, lequel est indéterminé et a pour limite zéro.

Le contact de l'ordre n des deux courbes proposées est donc établi par les équations :

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi'(x) = 0, \quad \varphi''(x) = 0, \dots, \varphi^n(x) = 0.$$

lesquelles reviennent aux suivantes :

$$f(x) = F(x).$$

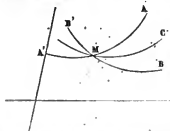
$$f'(x) = F'(x).$$

$$f''(x) = F''(x).$$

⋮
⋮
⋮

$$f^n(x) = F^n(x).$$

Donc : pour que deux courbes aient en un point, un contact de l'ordre n , il faut que les fonctions qui représentent leurs ordonnées et les n premières dérivées de ces fonctions deviennent égales lorsqu'on y remplace les coordonnées variables, par les coordonnées particulières du point où l'on veut établir le contact.



Remarque I. — Si deux courbes $A'A; B'B$ se coupent en un point M et ont en ce point un contact de l'ordre n ; il est évident qu'une troisième courbe MC passant par M ne pourra se trouver entre les deux courbes AA' et BB' , sans avoir avec chacune d'elles un contact d'un ordre supérieur à n , car

avec chacune d'elles la différence des ordonnées sera encore plus petite.

Remarque II. — L'expression de la différence des ordonnées de deux courbes $y = f(x)$, $y = F(x)$ dans le voisinage d'un point, dont le contact est de l'ordre n :

$$KH = \Delta x^{n+1} \left(\frac{f^{n+1}(x)}{1.2.3....(n+1)} + \epsilon \cdot \Delta x \right).$$

montre que si le contact est d'ordre impair, KH ne changera pas de signe avec Δx ; par suite les deux courbes se toucheront sans se couper. C'est ce qui a lieu pour la ligne droite, excepté aux points d'inflexion.

Si au contraire le contact est d'un ordre pair, KH change de signe avec Δx et dans ce cas les deux courbes se coupent.

La différence KH des ordonnées peut être considérée comme l'ordonnée de la première courbe comptée à partir de la seconde courbe.

Lorsqu'une courbe $y = F(x)$ a un contact de l'ordre n avec une autre courbe $y = f(x)$; on dit que ces deux courbes ont une osculation de l'ordre n et la courbe $y = F(x)$ prend le nom de courbe osculatrice.

Un contact de l'ordre n donne lieu à $n + 1$ équations.

Par suite si l'équation $y = F(x)$, contient $n + 1$ constantes indéterminées, on pourra déterminer ces constantes en exprimant que cette courbe, a un contact de l'ordre n , avec une courbe $y = f(x)$ en un point x', y' de cette dernière courbe.

Les $n + 1$ équations qui serviront à déterminer les $n + 1$ constantes de la courbe $y = F(x)$ seront les suivantes :

$$F(x) = f(x'), \quad F'(x) = f'(x'), \quad F''(x) = f''(x'), \dots, F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x').$$

on les a obtenues ci-dessus.

Les courbes les plus simples que l'on puisse mettre en contact avec une courbe donnée, sont les courbes dites *paraboliques*, lesquelles sont renfermées dans l'équation générale :

$$y = A + Bx + Cx^2 + \dots + Kx^n.$$

Droite osculatrice.

L'équation d'une droite est $y = ax + b$, il n'y entre que deux constantes; une droite ne peut donc avoir avec une courbe $f(x, y) = 0$ qu'un contact du premier ordre.

Pour établir ce contact en un point x', y' de la courbe proposée, nous aurons les équations :

$$y' = ax' + b \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{dy'}{dx'} = a \dots \dots \dots (2)$$

Le rapport $\frac{dy'}{dx'}$, étant tiré de l'équation de la courbe exprimera l'égalité des dérivées du premier ordre de la courbe et de la droite.

La substitution des valeurs de a et de b tirées des équations (1) et (2) dans l'équation $y = ax + b$, donne pour l'équation de la droite osculatrice :

$$y = \frac{dy'}{dx'} \cdot x + y' - x' \frac{dy'}{dx'}$$

ou :

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} \cdot (x - x').$$

La droite osculatrice en un point x', y' d'une courbe est donc la tangente en ce point; car $\frac{dy'}{dx'}$ est tirée de l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe.

Cercle osculateur.

L'équation générale du cercle est $(x - a)^2 + (y - c)^2 = R^2$, il n'y entre que trois constantes a , c et R ; le cercle ne peut donc avoir avec

une courbe donnée $f(x, y) = 0$ en un point donné x', y' qu'un contact du second ordre.

L'équation du cercle et les deux équations qu'on obtient en la différenciant deux fois, donnent les trois équations :

$$(x - \alpha) + (y - \zeta)^2 = R.$$

$$(x - \alpha) + (y - \zeta) \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} + (y - \zeta) \frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Si dans ces trois équations, on exprime que les coordonnées x, y sont celles du point particulier x', y' de la courbe, et que les dérivées première et deuxième $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ sont tirées de l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe ; on aura les trois équations :

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \zeta)^2 = R^2 \dots \dots \dots (1)$$

$$(x' - \alpha) + (y' - \zeta) \frac{dy'}{dx'} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \zeta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

lesquelles expriment les trois conditions nécessaires au contact du second ordre entre le cercle et la courbe. Ces équations feront donc connaître : les coordonnées α et ζ du centre et le rayon R du cercle osculateur.

Les équations (2) et (3) feront connaître les coordonnées α et ζ du centre ; la substitution des valeurs de α et de ζ dans la première fera connaître le rayon R .

Avant de passer outre, rappelons encore que dans les équations (2) et (3) les dérivées première et seconde $\frac{dy'}{dx'}, \frac{d^2y'}{dx'^2}$ sont tirées de l'équation $f(x, y) = 0$ de la courbe proposée.

Calcul de α, ζ et R .

Les équations (2) et (3) donnent :

$$y' - \zeta = - \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}} \dots \dots \zeta = y' + \frac{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

$$x' - \alpha = \frac{dy'}{dx'} \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}} \dots \dots \alpha = x' - \frac{dy'}{dx'} \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

Et en portant les valeurs de $x' = \alpha$ et $y' = \zeta$ dans (1), on trouve :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}.$$

Telles sont les valeurs des coordonnées du centre et du rayon du cercle osculateur d'une courbe $f(x, y) = 0$, en un point x', y' de cette courbe.

Propriété du cercle osculateur.

Le contact du cercle osculateur est du deuxième ordre, donc le cercle osculateur coupe la courbe (page 293, Rem. II).

L'équation (2) montre que les coordonnées α et ζ du centre satisfont à l'équation $(x - x') + (y - y') \frac{dy'}{dx'} = 0$ de la normale au point x', y' de la courbe; donc

Le centre du cercle osculateur en un point d'une courbe est sur la normale de ce point.

Les longueurs $x' - \alpha$, $y' - \zeta$ représentent évidemment, les projections du rayon du cercle osculateur sur les axes coordonnés; elles indiquent ainsi de quel côté du point de contact se trouve le centre du cercle osculateur.

L'équation :

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \zeta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

montre que $y' - \zeta$ et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ sont de signes contraires.

En discutant sur les signes des quantités y' et $\frac{d^2y'}{dx'^2}$, on voit que le centre du cercle osculateur est toujours situé dans la concavité de la courbe.

L'expression du rayon

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

montre que si $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nulle ou infinie, R est infini ou nul.

Si la dérivée seconde $\frac{d^2y'}{dx'^2}$ est nulle ou infinie, il y a inflexion, c'est-

à-dire qu'aux points d'inflexion le rayon du cercle osculateur est nul ou infini.

Le cercle de courbure et le cercle osculateur en un même point d'une courbe sont identiques.

Ces deux cercles ont même rayon, car tous deux ont pour expression

$$\frac{\left(1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y'}{dx'^2}}$$

De plus, leurs centres sont tous deux sur la normale du point considéré et dans la concavité de la courbe.

Ces deux cercles ont donc même rayon et même centre; par suite ces cercles sont identiques.

ÉQUATION DE LA DÉVELOPPÉE.

Si entre les trois équations

$$f(x', y') = 0.$$

$$(x' - \alpha) + (y' - \zeta) \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \zeta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0.$$

dans lesquelles : α et ζ sont les coordonnées du centre du cercle de courbure en un point particulier x', y' de la courbe $f(x, y) = 0$, on élimine x' et y' ; on arrivera à une équation $\phi(\alpha, \zeta)$ laquelle sera le lieu des centres de courbure.

Un tel lieu prend le nom de *développée* de la courbe $f(x, y) = 0$.

I. Propriétés de la développée d'une courbe.

Les équations :

$$(x' - \alpha) + (y' - \zeta) \frac{dy'}{dx'} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \zeta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

qui servent à déterminer les coordonnées α, ζ du centre de courbure ou du point de la développée, correspondant au point (x', y') de la

courbe donnée $f(x, y) = 0$, ont lieu quel que soit le point considéré ; si donc l'on donne à x' un accroissement infiniment petit, les quantités y' , α et ζ qui varient avec x' et qui par conséquent sont fonctions de x' prendront des accroissements correspondants et les équations (1) et (2) seront encore satisfaites ; les accroissements de leur premier membre seront donc nuls et par suite leurs dérivées par rapport à x' .

L'équation (1) différenciée, en considérant y' , α et ζ comme fonctions de x' , donne :

$$dx' - d\alpha + (y' - \zeta) \frac{d^2 y'}{dx'^2} + (dy' - d\zeta) \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

d'où :

$$1 - \frac{d\alpha}{dx'} + (y' - \zeta) \frac{d^2 y'}{dx'^2} + \frac{dy'^2}{dx'^2} - \frac{d\beta}{dx'} \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

Et à cause de l'équation (2) :

$$- \frac{d\alpha}{dx'} - \frac{d\zeta}{dx'} \cdot \frac{dy'}{dx'} = 0.$$

d'où :

$$\frac{d\zeta}{dx'} \cdot \frac{dy'}{dx'} + 1 = 0.$$

Cette équation montre que : le rayon de courbure ou la normale en un point de la courbe $f(x, y) = 0$, est tangent à sa développée au centre de courbure.

Cette propriété pouvait se déduire a priori de ce fait, que le centre de courbure en un point est la limite du point de rencontre de la normale en ce point et de la normale infiniment voisine (page 146, 1°).

II. Reprenons l'équation

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \zeta)^2 = R^2.$$

x' étant variable, les quantités y' , α , ζ et R sont fonctions de x' ,

En différenciant cette équation, il vient :

$$(x' - \alpha) dx' - (x' - \alpha) d\alpha + (y' - \zeta) dy' - (y' - \zeta) d\zeta = R \cdot dR.$$

d'où :

$$(x' - \alpha) + (y' - \zeta) \frac{dy'}{dx'} - (x' - \alpha) \frac{d\alpha}{dx'} - (y' - \zeta) \frac{d\zeta}{dx'} = R \cdot \frac{dR}{dx'}.$$

Or, les coordonnées α , ζ du centre de courbure, sont données par

(*) En effet, si l'on donne à x un accroissement, on obtient un nouveau point de la courbe $f(x, y) = 0$, et à ce nouveau point correspond un nouveau point sur la développée.

les équations :

$$(x' - \alpha) + (y' - \zeta) \frac{dy'}{dx'} = 0 \dots\dots (1)$$

$$1 + \frac{dy'^2}{dx'^2} + (y' - \zeta) \frac{d^2y'}{dx'^2} = 0 \dots\dots (2)$$

L'équation précédente devient donc à cause de (1) :

$$-(x' - \alpha) \frac{d\alpha}{dx'} - (y' - \zeta) \frac{d\zeta}{dx'} = \frac{R \cdot dR}{dx'}$$

On vient de démontrer la relation $\frac{dy'}{dx'} = -\frac{d\alpha}{d\zeta}$ en sorte que l'équation (1) devient :

$$x' - \alpha - (y' - \zeta) \frac{d\alpha}{d\zeta} = 0.$$

et si l'on résout les deux équations :

$$(x' - \alpha) - (y' - \zeta) \frac{d\alpha}{d\zeta} = 0 \dots\dots (a)$$

$$-(x' - \alpha) \frac{d\alpha}{dx'} - (y' - \zeta) \frac{d\zeta}{dx'} = \frac{R \cdot dR}{dx'}$$

en y considérant $x' - \alpha$ et $y' - \zeta$ comme inconnues, on trouve successivement :

$$-(y' - \zeta) \left(\frac{d\alpha^2 + d\zeta^2}{d\zeta dx'} \right) = R \frac{dR}{dx'} \quad \text{d'où} \dots y' - \zeta = -\frac{R \cdot dR \cdot d\zeta}{dx'^2 + d\zeta^2}$$

La substitution de cette valeur de $y' - \zeta$ dans la première équation (a) donne :

$$x' - \alpha = \frac{R \cdot dR \cdot d\alpha}{d\alpha^2 + d\zeta^2}$$

Et si l'on porte les valeurs de $x' - \alpha$ et de $y' - \zeta$ dans l'équation

$$(x' - \alpha)^2 + (y' - \zeta)^2 = R^2,$$

il vient après réduction :

$$\frac{dR^2}{d\alpha^2 + d\zeta^2} = 1$$

d'où :

$$dR = \sqrt{d\alpha^2 + d\zeta^2}.$$

Or si l'on appelle σ l'arc de la développée dont l'équation est $\phi(x, \zeta)$.

on, a (page 143) :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

par suite :

$$ds = dR.$$

d'où, en intégrant, il vient R' et R'' étant les rayons de courbure extrêmes de l'arc s

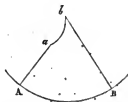
$$s = \int_{R'}^{R''} dR = R'' - R'.$$

c'est-à-dire que :

Un arc de la développée d'une courbe est égal à la différence des rayons de courbure de cette courbe, situés aux extrémités de cet arc.

Si donc l'on considère un arc de courbe AB dont l'arc correspondant de la développée est ab ; les normales extrêmes de l'arc AB sont Aa et Bb ; et l'on a :

$$\text{arc } ab = Bb - Aa.$$



Par suite, si l'on conçoit un fil inextensible tendu en B suivant Bb ; en enroulant ce fil sur la développée ab , de

telle sorte qu'il lui soit constamment tangent, son extrémité B décrira la courbe AB .

C'est cette propriété qui a fait donner le nom de *développée* d'une courbe au lieu géométrique de ses centres de courbure.

APPLICATIONS. — Déterminer les développées des courbes du deuxième degré et leurs rayons de courbure.

Avant de passer outre, rappelons les formules trouvées ci-dessus :

$$y - \zeta = - \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad x - \alpha = \frac{dy}{dx} \frac{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

lesquelles ont lieu pour un point x, y d'une courbe, correspondant au point α, ζ de sa développée.

R est le rayon de courbure au point x, y de la courbe.

1. Rayon de courbure et développée de l'ellipse.

L'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ de l'ellipse, donne en la différentiant deux fois, et en y considérant x , comme variable indépendante :

$$a^2y \, dy + b^2x \, dx = 0 \dots\dots d'où : \frac{dy}{dx} = - \frac{b^2x}{a^2y} \dots\dots (1)$$

$$a^2 \, dy^2 + a^2y \, d^2y + b^2 \, dx^2 = 0.$$

Cette dernière équation donne successivement à cause de (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= - \frac{b^2}{a^2y} - \frac{dy^2}{y \, dx^2} = - \frac{b^2}{a^2y} - \frac{b^4x^2}{a^4y^3} \\ &= - \frac{a^2b^2y^2 + b^4x^2}{a^4y^3} = - \frac{b^2(a^2y^2 + b^2x^2)}{a^4y^3} \end{aligned}$$

Et puisque : $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{b^4}{a^2y^3}.$$

La substitution des valeurs trouvées pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans l'expression de R, donne puisque R est une valeur absolue :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure de l'ellipse.

Substituons les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans $y - \zeta$ et $x - \alpha$, nous aurons :

$$y - \zeta = \frac{1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}}{\frac{b^4}{a^2y^3}} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4} \dots\dots (p)$$

$$x - \alpha = \frac{b^2x}{a^2y} \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)y}{a^2b^4} = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)x}{a^4b^2} \dots\dots (q)$$

L'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ donne :

$$b^4x^2 = a^2b^4 - a^2b^2y^2,$$

$$a^4y^2 = a^4b^2 - a^2b^2x^2.$$

Afin d'éliminer x dans (p) et y dans (q) , portons dans ces équations les valeurs b^4x^2 et a^4y^2 ainsi obtenues, nous aurons d'abord dans (p) :

$$y - c = \frac{(a^4y^2 + a^2b^4 - a^2b^2y^2)y}{a^2b^4},$$

d'où :

$$y - c = \frac{(a^2 - b^2)}{b^4} y^3 + y.$$

et en posant $a^2 - b^2 = c^2$,

$$-c = \frac{c^2}{b^4} y^3 \quad \text{d'où} \dots\dots y = -\frac{b^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} c^{\frac{1}{3}} \dots\dots (r)$$

puis dans (q) :

$$x - a = \frac{(a^4b^2 - a^2b^2x^2 + b^2x^2)x}{a^4b^2},$$

d'où :

$$x - a = x - \frac{(a^2 - b^2)}{a^4} x^3.$$

et puisqu'on a posé :

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

$$a = \frac{c^2}{a^4} x^3 \quad \text{d'où} \dots\dots x = \frac{a^{\frac{4}{3}}}{c^{\frac{2}{3}}} a^{\frac{1}{3}} \dots\dots (s)$$

Et en portant les valeurs de y et de x , de (r) et (s) dans l'équation $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ de l'ellipse, on a :

$$a^2 \frac{b^{\frac{8}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} c^{\frac{2}{3}} + b^2 \frac{a^{\frac{8}{3}}}{c^{\frac{4}{3}}} a^{\frac{2}{3}} = a^2b^2,$$

ou plus simplement :

$$b^{\frac{2}{3}} c^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}.$$

Telle est l'équation de la développée de l'ellipse. On en déduira aisément la construction de la courbe.

II. Rayon de courbure et développée de l'hyperbole.

En différenciant deux fois l'équation :

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

de l'hyperbole, on trouve :

$$a^2y \, dy - b^2x \, dx = 0 \dots\dots\dots \text{d'où : } \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y},$$

$$a^2y \, d^2y + a^2dy^2 - b^2dx^2 = 0 \dots\dots\dots \text{d'où } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^3y^3}.$$

En suivant identiquement ici, la marche que nous venons de prendre dans le calcul du rayon de courbure et de l'équation de l'ellipse, on trouvera :

$$R = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3b^4},$$

pour le rayon de courbure de l'hyperbole, et

$$b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}} = -c^{\frac{1}{3}},$$

pour l'équation de la développée de l'hyperbole.

Ici :

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

III. Rayon de courbure et développée de la parabole.

En différentiant deux fois l'équation $y^2 = 2px$ de la parabole, on trouve :

$$y \, dy = p \, dx \dots\dots\dots \text{d'où : } \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y},$$

$$y d^2y + dy^2 = 0 \dots\dots\dots \text{d'où : } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy^2}{y dx^2} = -\frac{p^2}{y^3}.$$

La substitution de ces valeurs dans R donne :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{p^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{p^2}{y^3}} = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Telle est l'expression du rayon de courbure de la parabole.

La substitution des valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ dans $y - c$ et $x - a$ donne d'abord :

$$y - c = \frac{1 + \frac{p^2}{y^2}}{\frac{p^2}{y^2}} = \frac{y^2 + p^2 y}{p^2} = y + \frac{y^3}{p^2},$$

d'où $-c = \frac{y^3}{p^2}$ et par suite, $y = -p^{\frac{2}{3}} c^{\frac{1}{3}}$ (t).

Puis :

$$x - a = -\frac{p}{y} \cdot \frac{y^3 + p^2 y}{p^2} = -\frac{y^2 + p^2}{p}.$$

Or :

$$y^2 = 2px,$$

donc :

$$x - a = -\frac{2px + p^2}{p} = -2x - p,$$

et par suite :

$$x = \left(\frac{a - p}{3} \right) \text{ (u).}$$

En portant dans l'équation $y^2 = 2px$ de la courbe, les valeurs de y et x , (t) et (u), il vient :

$$p^{\frac{4}{3}} c^{\frac{2}{3}} = 2p \left(\frac{a - p}{3} \right),$$

d'où :

$$c^{\frac{2}{3}} = 2p^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{a - p}{3} \right),$$

et finalement :

$$c^2 = \frac{8}{27} p (a - p)^2.$$

Telle est l'équation de la développée de la parabole.

Remarque. — Le cercle osculateur et le cercle de courbure d'une courbe étant identiques, il en résulte que le rayon du cercle osculateur en un point d'une courbe exprimée en coordonnées polaires a pour expression (voir page 149) :

$$R = \frac{\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{r^3 + 2 \frac{dr^2}{d\theta^2} - r \frac{d^2 r}{d\theta^2}}.$$

DE QUELQUES QUADRATURES.

1. Aire du cercle.



L'aire du quart de cercle comprise entre le diamètre OB et le point A, dont l'abscisse est R, a pour expression :

$$\int_0^R y \, dx.$$

Donc la surface totale s du cercle a pour valeur :

$$s = 4 \int_0^R y \, dx \dots \dots (1).$$

L'équation du cercle est $y^2 + x^2 = R^2$; par suite :

$y = \sqrt{R^2 - x^2}$; l'équation (1) devient donc :

$$s = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \dots \dots (2).$$

Il s'agit donc de calculer $\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$.

remarquons qu'ici : x devant être moindre que R , nous poserons $x = R \sin \varphi$, d'où : $dx = R \cos \varphi \, d\varphi$ et par suite (inf. n° III; page 169) :

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = R^2 \int \cos^2 \varphi \, d\varphi = R^2 \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \right) + C.$$

Mais :

$$\sin \varphi = \frac{x}{R}, \cos \varphi = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 - x^2}, \varphi = \arcsin \frac{x}{R},$$

donc enfin :

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + C.$$

Pour $x = 0$, le second membre se réduit à C .

Ici la constante C est nulle.

Pour $x = R$, le second membre devient :

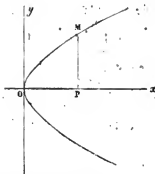
$$\frac{1}{2} R^2 \text{ arc sin } 1 = \frac{1}{4} \pi R^2,$$

donc :

$$\text{ou } \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi R^2.$$

Telle est l'expression connue de l'aire du cercle.

II. Aire de la parabole.



Cherchons l'aire OMP de la parabole comprise entre l'origine et une abscisse quelconque $OP = x$.
En appelant A cette aire, on a :

$$A = \int_0^x y dx.$$

Or, l'équation de la parabole est :

$$y^2 = 2px,$$

par suite :

$$A = \int_0^x \sqrt{2px} dx = \sqrt{2p} \int_0^x x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{2p} x^{\frac{3}{2}},$$

ou bien :

$$A = \frac{2}{3} \sqrt{2px} x = \frac{2}{3} xy.$$

C'est-à-dire que l'aire de la parabole, comprise entre l'origine et l'ordonnée d'un point de la courbe, est égale aux deux tiers de la surface du rectangle construit avec cette ordonnée et avec l'abscisse qui correspond à cette ordonnée.

III. Aire de l'ellipse.

L'équation de l'ellipse étant :



$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

on en tire :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Par suite, en désignant par A l'aire comprise entre le demi-petit axe OB et le sommet A dont l'abscisse est a, on a :

$$(1) \dots \dots A = \int_0^a y \, dx = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

Il s'agit donc de déterminer :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx.$$

remarquons qu'ici : x doit être moindre que a, nous posons donc :

$$x = a \sin \varphi, \quad \text{d'où :} \quad dx = a \cos \varphi \, d\varphi.$$

par suite (int. n° III, page 169) :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = a^2 \int \cos^2 \varphi \, d\varphi = a^2 \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{2} \right) + C,$$

or :

$$\sin \varphi = \frac{x}{a}, \quad \cos \varphi = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \varphi = \arcsin \frac{x}{a},$$

donc, par substitution :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Pour $x = 0$, le second membre devient C (sur la figure, on voit que $C=0$); pour $x=a$, le second membre devient $\frac{a^2}{2} \arcsin 1 = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$, en sorte que :

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi a^2}{4}.$$

On a donc, d'après (1), pour la surface A du quart de l'ellipse :

$$A = \frac{\pi ab}{4}.$$

La surface totale de l'ellipse est donc πab .

Si $a = b$, on a la surface du cercle ou πa^2 .

Remarque. — Si les axes sont obliques, $dA = y \sin \theta \, dx$, θ étant l'angle des axes, en sorte que si l'on suppose l'équation de l'ellipse rapportée à deux de ses diamètres conjugués, on trouvera pour l'aire totale de l'ellipse :

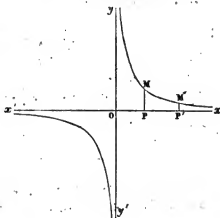
$$\pi a' b' \sin \theta$$

a' , b' étant deux demi-diamètres conjugués et θ étant leur inclinaison, on a donc :

$$ab = a' b' \sin \theta,$$

c'est-à-dire que la surface du rectangle des axes de l'ellipse, est équivalente à la surface du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués d'un même système.

IV. Aire de l'hyperbole.



L'équation de l'hyperbole, rapportée à ses asymptotes, est :

$$(1) \dots \dots xy = m^2.$$

Cherchons l'aire $MPM'P'$ de cette courbe, comprise entre l'asymptote ox et deux ordonnées $MP, M'P'$ correspondantes aux abscisses arbitraires OP et OP' que nous désignerons par a et b .

L'aire A cherchée a pour expression :

$$A = \int_a^b y \, dx \dots \dots (2).$$

De (1), on tire $y = m^2 \frac{1}{x}$, en sorte que (2) devient :

$$A = \int_a^b m^2 \frac{dx}{x} = m^2 \int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{m^2}{\text{Log } e} \int_a^b \frac{dx}{x} \text{Log } e,$$

or :

$$\int \frac{dx}{x} \text{Log } e = \text{Log } x + C,$$

donc :

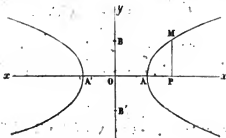
$$A = \frac{m^2}{\text{Log } e} \text{Log} \left(\frac{b}{a} \right).$$

Telle est l'expression de l'aire cherchée.

Remarque. — Si $m = 1$, $OP = a = 1$ et si de plus e est la base des logarithmes, on a :

$$A = \log b.$$

L'aire de l'hyperbole a donc alors pour expression le logarithme népérien de l'abscisse, de là vient le nom de *logarithmes népériens* ou *hyperboliques*.



Supposons la courbe rapportée à ses axes, son équation est :

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2, \dots, y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Il s'agit de calculer :

$$b \dots \dots \Lambda = \int_a^x y dx = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx,$$

afin d'avoir l'aire AMP comprise entre le sommet Λ et une ordonnée quelconque MP.

Il s'agit donc de calculer $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$: or, remarquons qu'ici x doit être plus grand que a , nous poserons donc :

$$x = a \sec \varphi, \quad \text{d'où :} \quad dx = a \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi,$$

par suite :

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= a^2 \int \sqrt{\sec^2 \varphi - 1} \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi d\varphi = a^2 \int \operatorname{tg}^2 \varphi \sec \varphi d\varphi = \\ &= a^2 \int \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\cos^3 \varphi} = a^2 \int \frac{(1 - \cos^2 \varphi) d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \\ &= a^2 \int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} - a^2 \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

Mais on a trouvé (intég. n° XIII, page 173) :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi + \frac{1}{2} \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi})$$

et (intég. n° IX, page 172) :

$$\int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}),$$

done par substitution :

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{tg} \varphi \sec \varphi - \frac{a^2}{2} \log (\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}),$$

or :

$$\sec \varphi = \frac{x}{a}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\sec^2 \varphi - 1} = \frac{1}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sec \varphi = \frac{x}{a}$$

done enfin :

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} \right) + C,$$

on en déduit aisément $\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx$.

V. Aire de la spirale logarithmique.

Pour une courbe polaire, on a :

$$dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Et si l'on considère la spirale logarithmique dont l'équation est $r = a^{\frac{\theta}{m}}$, ou bien $r = e^{m\frac{\theta}{m}}$, m désignant $\log a$, puisque $a = e^{\log a}$, on aura :

$$dA = \frac{1}{2} e^{2m\frac{\theta}{m}} d\theta.$$

par suite, l'aire de la courbe, comprise entre les limites θ' et θ'' , sera donnée par l'intégrale définie :

$$A = \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{1}{2} e^{2m\frac{\theta}{m}} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta'}^{\theta''} e^{2m\frac{\theta}{m}} d\theta,$$

or :

$$\int e^{2m\frac{\theta}{m}} d\theta = \int \frac{1}{2m} e^{2m\frac{\theta}{m}} d(2m\frac{\theta}{m}) = \frac{1}{2m} e^{2m\frac{\theta}{m}},$$

donc :

$$A \text{ ou } \int_{\theta'}^{\theta''} \frac{1}{2} e^{2m\frac{\theta}{m}} d\theta = \frac{1}{4m} (e^{2m\frac{\theta''}{m}} - e^{2m\frac{\theta'}{m}}) = \frac{r''^2 - r'^2}{4m}.$$

VI. Aire de la spirale d'Archimède.

L'équation de cette courbe est $r = a\theta$; l'aire A de la spirale sera donc donnée par l'équation :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\theta} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6} a^2 \theta^3.$$

VII. Aire de la courbe logarithmique.

L'équation de cette courbe est $y = m \log x$, l'expression de son aire est donc :

$$A = \int_{x'}^{x''} m \log x dx = m \int_{x'}^{x''} \log x dx,$$

on a trouvé précédemment :

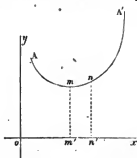
$$\int \log x dx = x \log x - x = x \log \left(\frac{x}{e} \right) + C,$$

donc :

$$A = m \left[x'' \log \left(\frac{x''}{e} \right) - x' \log \left(\frac{x'}{e} \right) \right].$$

Différentielle de l'aire d'une surface de révolution.

Soit une courbe AA' dont l'équation donnée est $y = f(x)$.



Cette courbe, en tournant autour de l'axe de x , engendre une surface de révolution.

Si l'on considère un arc infiniment petit mn de l'arc AA' , la surface engendrée par mn sera celle d'un tronc de cône (l'élément mn pouvant être considéré comme rectiligne), et l'on aura :

$$\text{surf. } mn = 2\pi mn \left(\frac{mm' + nn'}{2} \right).$$

Or, à la limite de mn , mn devient ds , les deux ordonnées mm' et nn' se confondent et surf. mn n'est autre chose que la différentielle de l'aire de la surface de révolution; en sorte que l'on a finalement :

$$d. \text{ surf. de révolution} = 2\pi y ds.$$

Cette expression de la différentielle d'une surface de révolution donne, pour l'expression Σ de cette surface :

$$\Sigma = 2\pi \int y ds.$$

APPLICATION. — Surface de l'ellipsoïde de révolution.

L'ellipse étant rapportée à ses axes, son équation est :

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2,$$

d'où :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y^2}.$$

Par suite ; en posant $a^2 - b^2 = a^2 e^2$:

$$\begin{aligned} ds &= dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx \cdot \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = \frac{b \cdot dx}{a^2 y} \cdot \sqrt{a^2 (a^2 - e^2 x^2)} = \\ &= \frac{b}{ay} \sqrt{a^2 - e^2 x^2} \cdot dx. \end{aligned}$$

L'équation :

$$s = 2\pi \cdot \int y \cdot ds.$$

donne donc pour l'expression de la surface du demi-ellipsoïde de révolution :

$$s = \frac{2\pi \cdot b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - e^2 x^2} = \frac{2\pi \cdot b \cdot e}{a} \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} dx, \dots (1)$$

On a trouvé ci-dessus (voir l'aire de l'ellipse) :

$$\int (\sqrt{a^2 - x^2}) dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

par suite :

$$\int \left(\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} \right) dx = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{2e^2} \arcsin \frac{ex}{a} + C.$$

Pour $x = 0$, le second membre devient C, or la surface étant nulle pour $x = 0$; $C = 0$.

Pour $x = a$, le même second membre devient, puisque $C = 0$:

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - a^2} + \frac{a^2}{2e^2} \cdot \arcsin e = \frac{ab}{2e} + \frac{a^2}{2e^2} \arcsin e.$$

En sorte que l'équation (1) donne pour la surface du demi-ellipsoïde de révolution :

$$s = \pi \cdot b^2 + \frac{\pi \cdot b \cdot a}{e} \arcsin e.$$

La surface entière de l'ellipsoïde a donc pour expression :

$$2 \cdot \pi \cdot b^2 + \frac{2 \pi \cdot b \cdot a^2}{e} \arcsin e \dots\dots (2).$$

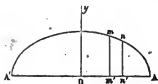
Lorsque $b = a$, l'ellipsoïde devient la sphère.

Dans ce cas, l'équation (2) devient en remarquant que pour $b = a$, $e = 0$ et que par suite $\lim_{e \rightarrow 0} \frac{\arcsin e}{e} = 1$:

$$\text{surf. sphère} = 4 \pi a^2.$$

Volume de l'ellipsoïde de révolution.

Si l'on considère le volume engendré par la surface comprise entre la courbe, l'axe des x et deux ordonnées infiniment voisines; alors que cette surface tourne autour de l'axe des x ; la limite du volume ainsi engendré a pour expression :



$$\pi \cdot y^2 dx.$$

Donc : le volume V du demi-ellipsoïde, engendré par la surface de l'ellipse tournant autour de l'axe AA' a pour expression :

$$V = \pi \cdot \int_0^a y^2 \cdot dx.$$

Or :

$$\begin{aligned} \int y^2 \cdot dx &= \frac{b^2}{a^2} \cdot \int (a^2 - x^2) dx = \frac{b^2}{a^2} \cdot \left(\int a^2 \cdot dx - \int x^2 \cdot dx \right) = \\ &= \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) + C. \end{aligned}$$

Pour $x = 0$, le second membre devient C ou 0 , car pour $x = 0$ le volume est nul.

Pour $x = a$, ce même second membre devient :

$$\frac{2}{3} ab^2.$$

Donc :

$$\int_0^a y^2 \cdot dx = \frac{2}{3} ab^2.$$

et par suite :

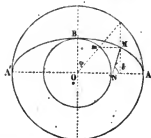
$$V = \frac{2}{3} \pi a b^2.$$

Si $b = a$, on a le demi-volume de la sphère

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3.$$

Expression d'un arc d'ellipse, dont les points extrêmes sont déterminés par les angles que les normales en ces points, font avec le grand axe.

Soit M un point de l'ellipse et soit l l'angle que fait avec le grand axe, la normale en ce point.



La figure ci-contre (laquelle rappelle un des procédés employés pour la construction de l'ellipse) nous donne en appelant ϕ l'angle BOM et x, y , les coordonnées du point M :

$$x = a \sin \phi. \quad y = b \cos \phi.$$

Ces équations montrent que x et y sont fonctions de l'angle ϕ que nous prendrons pour variable

indépendante.

Ceci posé, on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi \cdot d\phi^2 + b^2 \sin^2 \phi \cdot d\phi^2}.$$

d'où :

$$ds = - \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \phi} \, d\phi.$$

et en posant $a^2 - b^2 = a^2 e^2$,

$$ds = - a d\phi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi} \dots \dots \dots (1)$$

Mais on a trouvé (pages 98 et 99) :

$$\operatorname{tg} l \cdot \operatorname{tg} \phi = \frac{a}{b} \dots \dots \dots (2)$$

donc :

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{a}{b \cdot \operatorname{tg} l}$$

Et par suite :

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 l}} = \frac{\cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}.$$

La différentiation de l'équation (2) donne :

$$\operatorname{tg} \varphi \frac{dl}{\cos^2 l} + \operatorname{tg} l \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

ou bien :

$$\operatorname{tg} \varphi \frac{dl}{\cos^2 l} + \frac{a}{b \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

d'où l'on tire :

$$d\varphi = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 l} \cdot dl = -\frac{\sqrt{1 - e^2} dl}{1 - e^2 \sin^2 l}.$$

En portant dans l'équation (1) les valeurs de $d\varphi$ et de $\sin^2 \varphi$, il vient :

$$ds = a \frac{\sqrt{1 - e^2} dl}{1 - e^2 \sin^2 l} \cdot \sqrt{1 - e^2 \frac{\cos^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l}}.$$

et après réduction :

$$ds = a (1 - e^2) (1 - e^2 \sin^2 l)^{-\frac{3}{2}} \cdot dl.$$

Développons le binôme du second membre, en négligeant les termes à partir du terme en e^4 inclusivement, nous aurons :

$$ds = a (1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l \right) dl.$$

puis en remarquant que $\sin^2 l = \frac{1 - \cos 2l}{2}$

$$ds = a (1 - e^2) \left(1 + \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^2 \cos 2l \right) dl.$$

Et enfin, la multiplication effectuée du second membre dans laquelle on néglige les termes en e^4 donne :

$$\begin{aligned} ds &= a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) dl - \frac{3}{8} a e^2 \cos 2l \cdot dl \\ &= a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) dl - \frac{3}{8} a e^2 d(\sin 2l). \end{aligned}$$

Si donc, nous appelons l' et l'' les angles que font avec le grand axe

les normales des points extrêmes d'un arc dont la longueur est s ; nous aurons :

$$s = \int_{l'}^{l''} \left[a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) dl - \frac{3}{8} a e^2 d \sin 2l \right].$$

Et par suite :

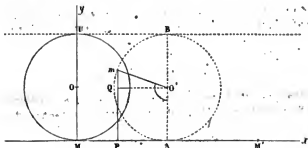
$$s = a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) (l'' - l') - \frac{3}{8} a e^2 (\sin 2l'' - \sin 2l').$$

$$s = a \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) (l'' - l') - \frac{3}{4} a e^2 \sin(l'' - l') \cos(l'' + l').$$

Telle est l'expression cherchée.

ÉTUDE DE LA CYCLOÏDE.

Soit Mx une droite sur laquelle roule sans glisser, une circonférence de rayon constant OM et soit M un point fixe de cette courbe. Le point M , dans le mouvement de la circonférence, engendre une courbe appelée *cycloïde* dont nous allons étudier les propriétés.



Lorsque la circonférence aura passé en entier sur la droite Mx , le point M se retrouvera sur Mx ; donc la cycloïde a une infinité de points communs avec Mx . L'équation de cette courbe ne peut donc être algébrique.

Si à partir de M : on divise la droite Mx aux points M' , M'' , M''' , ... tels que $MM' = M'M'' = M''M''' = \dots = \pi OM$; lorsque la circonférence de rayon OM se trouvera en ces points, le point générateur de la courbe se trouvera sur la parallèle UB à Mx . Ces positions particulières du point générateur, sont évidemment celles des points maximums de la courbe.

Cherchons l'équation de la cycloïde; à cet effet, prenons Mx pour axe des x et la perpendiculaire My pour axe des y .

Pour une position particulière de la circonférence, son centre étant en O' , le point M se trouvant en m , on a : $MA = \text{arc } Am$. Ceci posé, x et y étant les coordonnées du point m , et u étant l'angle $mO'A$, on a sur la figure :

$$x = AM - AP = a \cdot u - a \sin u = a \cdot (u - \sin u).$$

$$y = PQ + mQ = a - a \cos u = a (1 - \cos u).$$

a représente le rayon du cercle.

L'élimination de u entre les équations :

$$x = a \cdot (u - \sin u).$$

$$y = a \cdot (1 - \cos u).$$

donne :

$$u = \text{arc cos } \frac{a-y}{a} \quad \sin u = \frac{1}{a} \sqrt{2ay - y^2},$$

et par suite :

$$x = a \cdot \text{arc cos } \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$$

Telle est l'équation de la cycloïde.

Au lieu de prendre cette équation, il est plus simple de prendre pour représentation de l'équation de la cycloïde, l'ensemble des deux équations :

$$x = a (u - \sin u) \dots \dots \dots (1)$$

$$y = a (1 - \cos u) \dots \dots \dots (2)$$

dans lesquelles : l'indéterminée u , sera considérée comme variable indépendante; en sorte que x et y sont des fonctions explicites de cette variable.

Tangente à la cycloïde.

La différentiation des équations (1) et (2) donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u}.$$

et en éliminant u ,

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y}} - 1.$$

Pour $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$; donc aux points de rencontre de la courbe avec l'axe des x , la courbe est perpendiculaire à l'axe des x .

Lorsque $y = 2a$, $\frac{dy}{dx} = 0$; on vérifie ainsi l'existence des points maximums situés sur la parallèle UB.

Remarque. — La relation :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin u}{1 - \cos u}$$

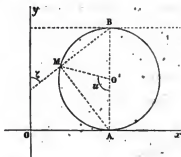
donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} u \cdot \cos \frac{1}{2} u}{2 \sin^2 \frac{1}{2} u} = \cot \frac{u}{2}$$

et par suite :

$$\tan \frac{u}{2} = \frac{dx}{dy}$$

or $\frac{dx}{dy}$ représente la tangente de l'angle ζ , que la tangente à la courbe fait avec l'axe des y ; donc $\zeta = \frac{1}{2} u$.

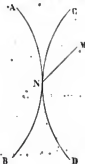


Sur la figure, l'angle inscrit $\text{MBA} = \frac{1}{2} u$; donc MB est la tangente à la courbe en M et par suite MA en est la normale.

Donc, nous voyons que dans la cycloïde : la ligne qui joint le point A de contact du cercle roulant au point générateur M est normale à la courbe engendrée.

Ce principe est général; c'est-à-dire que si une courbe CD roule

sans glisser sur une courbe fixe AB, un point M lié à la courbe CD en-



ANALYSE.

gendre une courbe et pour chaque position du point de contact N des courbes, la ligne MN est normale à la courbe engendrée par le point M.

En effet, les deux courbes peuvent être considérées comme des polygones à côtés égaux $hnn'pq$, $Hnn'PQ$; les deux courbes étant tangentes, les deux polygones ont un élément commun nn' ; la rotation du polygone $Hnn'PQ$ se fait autour du point n' comme centre et les éléments $n'P$, PQ , ... viennent se confondre successivement avec les éléments $n'p$, pq , ... Dans ce mouvement le point M qui engendre la courbe décrit une série de petits arcs de cercle dont les centres sont n' , p , q et les rayons correspondants $n'M$, pM , qM de ces petits arcs de cercle sont normaux à ces arcs, c'est-à-dire à la courbe engendrée par le point M.

Expression de la normale.

La normale à la courbe étant MA, on a, sur la figure qui vient avant la précédente.:

$$MA \text{ ou } N = 2a \sin \frac{u}{2}.$$

On arriverait au même résultat au moyen de la formule comme :

$$N = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

Rayon de courbure.

Ici x n'étant pas la variable indépendante, on a :

$$R = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} \dots\dots (\alpha)$$

la différentiation des équations (1) et (2) donne successivement :

$$dx = a (1 - \cos u) \cdot du.$$

$$dy = a \cdot \sin u \cdot du.$$

$$d^2x = a \cdot \sin u \cdot du^2.$$

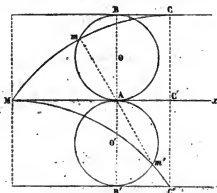
$$d^2y = a \cdot \cos u \cdot du^2.$$

et la substitution de ces valeurs dans (α) donne pour R :

$$R = 4a \cdot \sin \frac{u}{2} = 2N.$$

Donc : le rayon de courbure de la cycloïde est double de la normale.

Remarque. — Ce résultat conduit à la propriété suivante :



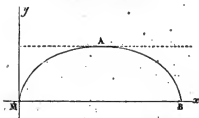
Si sur le prolongement du diamètre AB du cercle générateur, on décrit un cercle de centre O' et de diamètre $AB' = AB$; m étant la position du point générateur mA sera la normale et en prolongeant mA jusqu'à sa rencontre en m' avec le nouveau cercle, on aura $mm' = 2mA$, donc mm' est le rayon de courbure de la cycloïde au point m ; et m' est le centre de courbure.

Ceci posé, soit C le point le plus élevé de la cycloïde, menons la perpendiculaire CC' sur Mx et prolongeons-la de $C''C' = CC'$; alors $MC = MC' = \text{arc } BmA = \text{arc } Am'B'$ car les deux cercles sont égaux. De plus, $\text{arc } Am = \text{arc } Am'$, donc les suppléments de ces arcs, c'est-à-dire $\text{arc } mB$ et $\text{arc } m'B'$, sont égaux à AC' ou $B'C''$.

L'égalité $\text{arc } B'm' = B'C''$ montre que : le centre de courbure m' , se trouve sur la cycloïde engendrée par un cercle de même rayon, glissant en sens inverse sur la même droite Mx et symétriquement placé au-dessous de cette droite.

La développée de la cycloïde est donc une cycloïde.

Aire de la cycloïde.



L'aire A , de la courbe MAB , produite par une révolution entière du

cercle roulant est donnée par l'équation :

$$A = \int_0^{2\pi} y \cdot dx.$$

et en remplaçant y et dx par leurs valeurs, on a :

$$(1) \dots A = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos u)^2 du = 8a^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2}.$$

Or :

$$\int \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = - \int \sin^3 \frac{u}{2} \cdot d \cos \frac{u}{2},$$

et d'après le principe, d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} &= - \sin^3 \frac{u}{2} \cdot \cos \frac{u}{2} + 3 \int \sin^2 \frac{u}{2} \cos^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = \\ &= - \sin^3 \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + 3 \int \sin^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} - 3 \int \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$(2) \dots \int \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = - \frac{1}{4} \sin^3 \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \frac{3}{4} \int \sin^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2}.$$

de même :

$$\begin{aligned} \int \sin^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} &= - \int \sin \frac{u}{2} \cdot d \cos \frac{u}{2} = - \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \int \cos^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = \\ &= - \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \int d \frac{u}{2} - \int \sin^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

d'où :

$$\int \sin^2 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = - \frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \frac{u}{4}.$$

L'équation (2) devient donc par substitution :

$$\int \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = - \frac{1}{4} \sin^3 \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} - \frac{3}{8} \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2} + \frac{3}{16} u + C.$$

Pour $u = 0$ le second membre est nul, car l'aire étant nulle pour $u = 0$, la constante est nulle aussi.

Pour $u = 2\pi$ le second membre devient $\frac{3}{8}\pi$.

Par suite :

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \frac{u}{2} \cdot d \frac{u}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

L'équation (1) donne donc pour l'aire de la cycloïde :

$$A = 3\pi \cdot a^2,$$

c'est-à-dire que : l'aire de la cycloïde est égale, au triple de celle du cercle sur lequel se trouve le point générateur.



On arrive plus simplement à ce résultat, par les considérations suivantes :

Prenons, à partir de l'origine, une longueur OA égale au diamètre $2a$ du cercle générateur, et menons en A la perpendiculaire AU à l'axe des y.

Soit O le point du cercle engendrant la cycloïde et supposons que ce cercle tourne sur la parallèle UU'.

Lorsque le point O sera venu en M, son abscisse sera OA = $2a$ et son ordonnée sera MA = πa .

L'aire totale M'OM sera donc

donnée par l'expression :

$$A = 2 \int_0^{2a} y dx,$$

or :

$$\int y dx = xy - \int x dy, \dots \dots (1),$$

mais on a trouvé précédemment :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x} - 1} = \sqrt{\frac{2a-x}{x}} \quad (2),$$

d'où :

$$dy = \sqrt{\frac{2a-x}{x}} dx.$$

L'équation (1) devient donc :

$$\begin{aligned} \int y dx &= xy - \int x \sqrt{\frac{2a-x}{x}} dx, \\ &= xy - \int \sqrt{2ax - x^3} dx, \\ &= xy - \int \sqrt{a^3 - (a-x)^3} dx. \end{aligned}$$

Le cercle de diamètre OA a pour équation :

$$y^2 + (x-a)^2 = a^2,$$

par suite :

$$\int_0^{2a} \sqrt{a^3 - (a-x)^3} dx = \frac{1}{2} \text{ aire du cercle de rayon } OC = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

Pour $x = 2a$, $y = \pi a$. L'équation :

$$\int y dx = xy - \int \sqrt{a^3 - (a-x)^3} dx,$$

donne zéro pour $x=0$, et pour $x=a$, son second membre devient $2\pi a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2$, donc :

$$2 \int_0^{2a} y dx \text{ ou } A = 4\pi a^2 - \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Longueur de la cycloïde.

(Nous revenons à la première figure sur la génération de la cycloïde.)

Proposons-nous de calculer la longueur de l'arc AMB compris entre $x=0$ et $x=2\pi$, on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a \sin \frac{u}{2} du = 4a \sin \frac{u}{2} d\frac{u}{2}.$$

(*) On a trouvé précédemment $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{y}} - 1$, mais si l'on remarque que sur la figure actuelle, la manière de faire rouler le cercle est changée, on a pour ce changement $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a}{x}} - 1$.

La longueur s de l'arc AMB sera donc donnée par l'équation :

$$(1) \dots s = 4a \int_0^{2\pi} \sin \frac{u}{2} d \frac{u}{2} = 4a \int_0^{2\pi} d \left(\cos \frac{u}{2} \right) = 8a.$$

On prend ici pour s le signe +, car l'arc de la courbe et l'angle au centre u varient dans le même sens.

L'équation (1) montre que l'arc de cycloïde, compris entre deux points consécutifs de cette courbe, situés sur l'axe de rotation, est égal à huit fois le rayon du cercle roulant.

Surface de révolution engendrée par la cycloïde.

L'arc AMB de la cycloïde, en tournant autour de l'axe de rotation, engendre une surface de révolution, dont l'expression est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned} (1) \dots \Sigma &= 2\pi \int_0^{2\pi} y ds = 2\pi \int_0^{2\pi} 4a^2 (1 - \cos u) \sin \frac{u}{2} d \frac{u}{2} = \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{u}{2} d \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

Mais :

$$\begin{aligned} \int \sin^3 \frac{u}{2} d \frac{u}{2} &= \int \sin^2 \frac{u}{2} \sin \frac{u}{2} d \frac{u}{2} = - \int (1 - \cos^2 \frac{u}{2}) d \cos \frac{u}{2} = \\ &= - \int d \cos \frac{u}{2} + \int \cos^3 \frac{u}{2} d \cos \frac{u}{2} = \\ &= - \cos \frac{u}{2} + \frac{1}{3} \cos^3 \frac{u}{2} + C. \end{aligned}$$

Pour $u = 0$, le second membre devient $-\frac{2}{3} + C$.

Pour $u = 2\pi$, ce second membre devient $\frac{2}{3} = C$, donc :

$$\int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{u}{2} d \frac{u}{2} = \frac{4}{3}.$$

L'équation (1) donne donc pour la surface engendrée par la cycloïde :

$$\Sigma = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

Volume de révolution engendré par la cycloïde.

L'expression V du volume de révolution engendré par l'aire comprise entre l'arc AMB et l'axe de rotation est donnée par l'équation :

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos u)^3 du = \\ &= 16 \pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2} d \frac{u}{2}. \end{aligned}$$

En suivant la marche indiquée ci-dessus pour déterminer l'intégrale de $\int \sin^6 \frac{u}{2} d \frac{u}{2}$, on trouve :

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{u}{2} d \frac{u}{2} = \frac{5}{16} \pi.$$

et par suite :

$$V = 5 \pi^2 a^3.$$

DE LA CHAINETTE.

Equation de la chaînette.

L'étude des propriétés du polygone funiculaire conduit à ce théorème :

Le rapport de la longueur d'un arc de la chaînette, au coefficient angulaire de la tangente est constant.

Nous prendrons cette propriété pour définition de la chaînette.

Donc, si a est le rapport constant qui existe entre la longueur de l'arc de la chaînette et le coefficient angulaire de la tangente, nous aurons :

$$s = a \frac{dy}{dx}.$$

et en appelant p la fonction $\frac{dy}{dx}$:

$$s = a \cdot p.$$

La différentiation de cette équation donne en nous rappelant que

$$ds = dx \cdot \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = dx \cdot \sqrt{1 + p^2} :$$

$$dx \cdot \sqrt{1 + p^2} = a \cdot dp.$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{a} dx. \quad (u)$$

mais on a trouvé (intég. n° III, page 177),

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \log \left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + 1} \right).$$

donc, en intégrant l'équation (u), il vient :

$$(1) \dots \log(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{x-a}{a}.$$

a étant une constante arbitraire, l'équation (1) donne :

$$p + \sqrt{1+p^2} = e^{\frac{x-a}{a}} \quad (m)$$

L'équation (1) donne en multipliant haut et bas entre parenthèses par $p - \sqrt{1+p^2}$

$$\log \left(\frac{-1}{p - \sqrt{1+p^2}} \right) = \frac{x-a}{a},$$

et puisque $\log \left(\frac{a}{b} \right) = -\log \frac{b}{a}$, il vient :

$$\log \left(\frac{p - \sqrt{1+p^2}}{-1} \right) = -\frac{x-a}{a}.$$

d'où :

$$\frac{p - \sqrt{1+p^2}}{-1} = e^{-\frac{x-a}{a}}$$

et par suite :

$$(n) \dots p - \sqrt{1+p^2} = -e^{-\frac{x-a}{a}}$$

Les équations (m) et (n) donnent par addition :

$$p = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x-a}{a}} - e^{-\frac{x-a}{a}} \right),$$

c'est-à-dire; puisque $p = \frac{dy}{dx}$

$$dy = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x-a}{a}} - e^{-\frac{x-a}{a}} \right) dx.$$

ou bien :

$$dy = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-a}{a}} - e^{-\frac{x-a}{a}} \right) d\left(\frac{x-a}{a}\right).$$

et en intégrant, il vient :

$$y - a = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-a}{a}} + e^{-\frac{x-a}{a}} \right),$$

a étant une constante arbitraire.

Telle est l'équation de la chaînette.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point dont les coordonnées sont a et ζ , on a l'équation plus simple :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Construction de la courbe.

L'équation :

$$y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) \quad (1)$$

ne change pas alors qu'on y remplace x par $-x$, donc la chaînette est symétrique par rapport à l'axe des y ; de plus a étant positif y reste constamment positif quel que soit le signe de x .

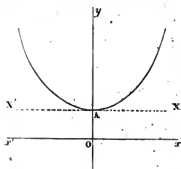
La différentiation de l'équation (1) donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}} \right).$$

Pour $x = 0$, on a $y = a$, et

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Donc, si $oA = a$: et si l'on mène la parallèle XX' à l'axe des x , on a en A , un point de la courbe et en ce point la courbe est tangente à XX' .



Si x croît, y va aussi en croissant et $\frac{dy}{dx}$ reste positif et va en croissant; pour $x = \infty$, $y = \infty$; $\frac{dy}{dx} = \infty$.

Donc la chaînette s'étend à l'infini à droite et à gauche de l'axe des y et puisqu'à l'infini la tangente à la courbe devient perpendiculaire à l'axe des x , il en résulte que la courbe n'a pas d'asymptote.

Remarque. — L'équation de la chaînette

$$s = a \frac{dy}{dx},$$

ou

$$s = a \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

donne, en différentiant :

$$ds = a \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha},$$

et par suite :

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2 \alpha}.$$

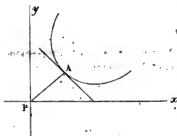
Mais $\frac{ds}{d\alpha} =$ rayon de courbure; donc :

Dans la chaînette, le rayon de courbure est inversement proportionnel au carré du cosinus de l'inclinaison de la tangente.

DE QUELQUES QUESTIONS

DANS LESQUELLES ON EST CONDUIT A DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. Trouver une courbe telle que la normale passe par un même point fixe.



Soit P le point fixe par lequel doivent passer toutes les normales de la courbe cherchée. Nous prendrons ce point pour origine des coordonnées, supposées rectangulaires.

Soient x' , y' les coordonnées d'un point de la courbe; l'équation de la normale en ce point est :

$$y - y' = -\frac{dx'}{dy'} (x - x').$$

puisque cette droite doit toujours passer par l'origine, son équation doit toujours être satisfaite pour $x = 0$, $y = 0$; on a donc :

$$-y' = \frac{dx'}{dy'} \cdot x.$$

d'où :

$$y' \cdot dy' + x' \cdot dx' = 0.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Cette équation donne, en multipliant par 2 ses deux membres :

$$2y' \cdot dy' + 2x' \cdot dx' = 0.$$

d'où :

$$dy'^2 + dx'^2 = 0.$$

et en intégrant :

$$y^2 + x^2 = C.$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

La courbe cherchée est donc un cercle de rayon indéterminé et dont le centre est le point fixe P.

II. Trouver une courbe dans laquelle la normale soit constante.

Supposons les axes rectangulaires et soient x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe cherchée.

Soit m la longueur de la normale en ce point, on a trouvé pour l'expression de cette longueur (page 198) :

$$m = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

d'où :

$$m^2 - y^2 = \frac{dy^2}{dx^2}.$$

et par suite :

$$\sqrt{m^2 - y^2} dx = y dy.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Afin de l'intégrer, remarquons qu'ici y doit être moindre que m ; nous poserons donc $y = m \sin \varphi$; d'où $dy = m \cos \varphi d\varphi$, en sorte que l'équation précédente devient :

$$m \cos \varphi dx = m \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

$$dx = -m d \cos \varphi.$$

d'où en intégrant :

$$x - C = -m \cos \varphi.$$

L'équation $y = m \sin \varphi$ donne

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{y^2}{m^2}} = \frac{1}{m} \sqrt{m^2 - y^2}.$$

par suite :

$$x - C = -\sqrt{m^2 - y^2}.$$

et enfin, élevant au carré :

$$y^2 + (x - C)^2 = m^2.$$

La courbe cherchée est donc un cercle ayant pour rayon la longueur donnée et dont le centre se trouve sur l'axe des x .

Remarque. — La division des deux membres de l'équation $\sqrt{m^2 - y^2} dx = y dy$ par $\sqrt{m^2 - y^2}$ revient à supprimer le facteur commun $\sqrt{m^2 - y^2}$, il faut donc, dans la question, tenir compte de la solution $\sqrt{m^2 - y^2} = 0$, d'où :

$$y = \pm m.$$

Nous trouvons ainsi que les deux droites parallèles à l'axe des x , et menées au-dessus et au-dessous de cet axe, à une distance égale à m , répondent aussi à la question; ce qui est évident.

III. Trouver une fonction qui soit à elle-même sa dérivée.

Soit $f(x)$ la fonction cherchée, sa dérivée est : $\frac{df(x)}{dx}$, on doit donc avoir :

$$\frac{df(x)}{dx} = f(x).$$

d'où :

$$\frac{df(x)}{f(x)} = dx.$$

ou bien :

$$d. \log f(x) = dx.$$

et en intégrant :

$$\log f(x) = x + C.$$

par suite :

$$f(x) = e^C \cdot e^x = A \cdot e^x.$$

La fonction cherchée est donc une exponentielle.

IV. Trouver une courbe dans laquelle la sous-normale et la sous-tangente d'un point soient toujours dans le rapport de la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'ordonnée à la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'abscisse.

SN et ST étant la sous-normale et la sous-tangente d'un même point, on doit avoir :

$$\frac{SN}{ST} = \frac{y^m}{x^n}.$$

or (pages 191 et 192) :

$$SN = \frac{y dy}{dx}, \quad ST = \frac{y dx}{dy}.$$

par suite :

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^n}{x^n}.$$

Telle est l'équation différentielle du lieu cherché.

Afin de l'intégrer écrivons-la ainsi :

$$\frac{dy^2}{y^n} = \frac{dx^2}{x^n}.$$

d'où :

$$\frac{\frac{dy^2}{y^{\frac{n}{2}}}}{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\frac{dx^2}{x^{\frac{n}{2}}}}{\frac{1}{2}}.$$

$$y^{-\frac{n}{2}} dy = \pm x^{-\frac{n}{2}} dx.$$

mais :

$$\int y^{-\frac{n}{2}} dy = \frac{y^{-\frac{n}{2}+1}}{-\frac{n}{2}+1}, \quad \int x^{-\frac{n}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{n}{2}+1}}{-\frac{n}{2}+1}.$$

donc enfin :

$$\frac{\frac{2-m}{2}}{\frac{2-m}{2}} + \frac{\frac{2-n}{2}}{\frac{2-n}{2}} = C.$$

Telle est l'équation générale de toutes les courbes qui répondent à la question.

Remarque. — Si $m = n = 2$, l'équation de condition devient :

$$\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{y^2}{x^2}.$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{y}{x}.$$

$$x dy \mp y dx = 0.$$

et par suite les deux équations :

$$x dy + y dx = 0.$$

$$x dy - y dx = 0.$$

La première donne :

$$d(xy) = 0,$$

d'où :

$$xy = C.$$

C'est là l'équation de toutes les hyperboles ayant pour asymptotes les axes coordonnées.

La seconde équation

$$x dy - y dx = 0$$

peut s'écrire ainsi :

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0.$$

d'où :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

et par suite :

$$\frac{y}{x} = C, \dots, y = Cx.$$

C'est là l'équation générale de toutes les droites passant par l'origine des coordonnées.

La propriété se vérifie aisément, pour ces droites, comme pour les hyperboles trouvées ci-dessus.

• V. Trouver une courbe telle que la sous-normale y soit constante.

Soit p la longueur constante de la sous-normale; l'expression de cette ligne étant $y \frac{dy}{dx}$ (page 192), on doit avoir :

$$\frac{y dy}{dx} = p.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

On en tire :

$$2y dx = 2p dx.$$

$$d(y^2) = d(2px).$$

d'où :

$$y^2 = 2px + C.$$

Telle est l'équation des courbes cherchées. Ces courbes sont des paraboles ayant pour axe, l'axe des x .

VI. *Trouver une courbe telle que la sous-tangente y soit double de l'abscisse.*

La sous-tangente en un point x, y , d'une courbe, ayant pour expression $y \frac{dx}{dy}$ (page 191), on doit avoir :

$$y \frac{dx}{dy} = 2x.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes cherchées.

On en tire successivement :

$$\frac{y}{dy} = \frac{2x}{dx}.$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{dx}{x}.$$

$$d \log y = \frac{1}{2} d \log x.$$

et en intégrant :

$$\log y = \frac{1}{2} \log x + C.$$

On peut mettre la constante sous la forme $\frac{1}{2} \log C$, en sorte que l'on a :

$$\log y = \frac{1}{2} \log Cx.$$

d'où :

$$2 \log y = \log Cx.$$

$$\log y^2 = \log Cx.$$

et enfin :

$$y^2 = Cx.$$

Les courbes cherchées sont donc des paraboles ayant toutes pour sommet l'origine, et pour axe l'axe des x .

VII. *Trouver une courbe telle que le segment de surface compté à partir de l'origine et compris entre la courbe, l'axe des x et une ordonnée, soit égal au logarithme de l'abscisse.*

Soit A l'expression de l'aire du segment terminé à l'abscisse x , on

doit avoir :

$$A = \log x.$$

or :

$$A = \int y \cdot dx.$$

d'où :

$$\int y dx = \log x.$$

et en différentiant cette équation :

$$y dx = \frac{dx}{x}.$$

d'où :

$$xy = 1.$$

La courbe cherchée est donc une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes les axes coordonnés.

VIII. *Trouver une courbe telle que la sous-normale soit proportionnelle à l'abscisse.*

SN étant la sous-normale en un point x, y de la courbe :

$$SN = \frac{y \cdot dy}{dx}.$$

Si donc, m est le rapport constant de la sous-normale à l'abscisse; on aura :

$$\frac{SN}{x} = m.$$

et par suite :

$$\frac{y \cdot dy}{x \cdot dx} = m.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

On en tire successivement :

$$2y dy = m \cdot 2x dx.$$

$$dy^2 = d(mx^2);$$

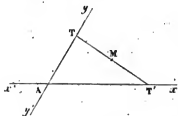
et en intégrant :

$$y^2 = mx^2 + C.$$

Telle est l'équation des courbes cherchées.

Suivant que m est négatif ou positif, ces courbes sont des ellipses ou des hyperboles.

IX. Trouver une courbe telle, que la portion de tangente comprise entre deux droites fixes données, soit toujours divisée en deux parties égales par le point de contact.



Soient yy' et xx' les deux droites données; prenons-les pour axes coordonnés.

Soit TT' la tangente en un point M dont les coordonnées sont x', y' .

D'après l'énoncé, le point M est le milieu de TT' .

L'équation de la tangente TT'

est :

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'}(x - x'),$$

son abscisse, à l'origine $A T'$, s'obtient en faisant $y = 0$, dans cette équation, on a donc :

$$A T' - x' = -\frac{y' dx'}{dy'} \quad (1).$$

Or, sur la figure, le point M étant le milieu de TT' , il en résulte que

$$A T' = 2x'.$$

L'équation (1) devient donc :

$$x' = -\frac{y' dx'}{dy'},$$

d'où :

$$-x' dy' + y' dx' = 0.$$

$$d(x'y') = 0,$$

$$x'y' = C.$$

Les courbes cherchées sont donc des hyperboles ayant pour asymptotes les deux droites données.

Ce problème, montre que : dans une hyperbole le point de contact d'une tangente, terminée aux deux asymptotes, est le milieu de cette ligne.

X. Trouver une courbe dans laquelle le rayon de courbure soit constant.

Soit R, le rayon de courbure constant de la courbe cherchée ; l'expression de ce rayon de courbure au point x, y est :

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

d'où :

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = R.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Afin de l'intégrer, posons :

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi.$$

remarquons que :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx},$$

par suite :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d \operatorname{tg} \varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

L'équation différentielle devient donc par substitution :

$$R = \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{\cos^2 \varphi}} = \frac{\left(\frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{\cos^2 \varphi}} = \frac{\frac{1}{\cos^3 \varphi}}{\frac{d\varphi}{dx} \frac{1}{\cos^2 \varphi}},$$

$$R = \frac{dx}{\cos \varphi d\varphi},$$

d'où :

$$dx = R \cos \varphi \, d\varphi = R \sin \varphi,$$

et en intégrant, il vient; α étant une constante arbitraire

$$x - \alpha = R \sin \varphi. \quad (1).$$

Reprenons l'équation :

$$\frac{dy}{dx} = \tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

remplaçons-y, dx par sa valeur $R \cos \varphi \, d\varphi$, nous aurons :

$$\frac{dy}{R \cos \varphi \, d\varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

d'où :

$$dy = R \sin \varphi \, d\varphi = -R \, d \cos \varphi,$$

et en intégrant il vient, C étant une constante arbitraire :

$$y - C = -R \cos \varphi. \quad (2).$$

L'addition membre à membre des équations (1) et (2) élevées au carré donne :

$$(x - \alpha)^2 + (y - C)^2 = R^2.$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

Ce lieu est un cercle de rayon R et dont le centre est indéterminé.

XI. Trouver une courbe telle que, en un point quelconque, la somme de la sous-tangente et de la sous-normale soit constante et égale à une longueur donnée $2c$.

On doit avoir :

$$SN + ST = 2c,$$

or :

$$SN = \frac{y \, dy}{dx}, \quad ST = \frac{y \, dx}{dy}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc :

$$y \left(\frac{dy}{dx} + \frac{dx}{dy} \right) = 2c.$$

Cette équation donne successivement :

$$y \left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right) = 2c,$$

$$y \frac{dy^2}{dx^2} - 2c \frac{dy}{dx} + y = 0;$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - y^2}}{y},$$

et par suite :

$$dx = \frac{y dy}{c \pm \sqrt{c^2 - y^2}}.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit d'intégrer.

A cet effet, multiplions en haut et bas le second membre par $c \mp \sqrt{c^2 - y^2}$, nous aurons :

$$dx = \frac{y (c \mp \sqrt{c^2 - y^2}) dy}{y^2},$$

et en intégrant :

$$x = \int \frac{c dy}{y} \mp \int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y},$$

d'où :

$$x = c \log y \mp \int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y}. \quad (1).$$

Il nous reste à calculer ;

$$\int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y}.$$

Remarquons qu'ici, y doit être moindre que c , nous pouvons donc poser : $y = c \sin \varphi$, d'où $dy = c \cos \varphi d\varphi$ et par substitution :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y} &= \int \frac{c^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{c \sin \varphi} = c \int \frac{(1 - \sin^2 \varphi) d\varphi}{\sin \varphi} = \\ &= c \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} - c \int \sin \varphi d\varphi \\ &= c \int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} + c \cos \varphi. \end{aligned}$$

Mais on a trouvé (intég. n° VIII, page 171).

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi} = \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

donc :

$$\int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y} = c \log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + c \cos \varphi.$$

$$\begin{aligned} \text{La trigonométrie donne } \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} &= \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}, \end{aligned}$$

par suite :

$$\int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y} = c \log \left(\frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) + c \cos \varphi.$$

L'équation $y = c \sin \varphi$ donne $\sin \varphi = \frac{y}{c}$, $\cos \varphi = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - y^2}$ et par substitution :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{c^2 - y^2} dy}{y} &= c \log \left(\frac{\frac{y}{c}}{1 + \frac{1}{c} \sqrt{c^2 - y^2}} \right) + \sqrt{c^2 - y^2} = \\ &= c \log \left(\frac{y}{c + \sqrt{c^2 - y^2}} \right) + \sqrt{c^2 - y^2}. \end{aligned}$$

L'équation (1) devient donc par substitution, en remarquant que $\log \left(\frac{a}{b} \right) = -\log \left(\frac{b}{a} \right)$:

$$x = c \log y \pm \sqrt{c^2 - y^2} + c \log \left(\frac{c}{y} + \sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1} \right) + C,$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée.

La séparation des signes donne les équations :

$$x = c \log (c + \sqrt{c^2 - y^2}) - \sqrt{c^2 - y^2} + C',$$

$$x = c \log \left(\frac{y}{\frac{c}{y} + \sqrt{\frac{c^2}{y^2} - 1}} \right) + \sqrt{c^2 - y^2} + C'.$$

Telles sont les équations des deux genres de courbes, qui répondent à la question.

XII. *Trouver une courbe dans laquelle la normale soit proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée.*

N étant la longueur de la normale en un point x, y d'une courbe, on a :

$$N = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}.$$

En sorte que si $\sqrt{2m}$ est le rapport constant, qui existe entre la normale et la racine carrée de l'ordonnée, il vient :

$$y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \sqrt{2m} \sqrt{y},$$

d'où l'on tire successivement :

$$y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} \right) = 2m,$$

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2m - y}{y}},$$

$$dx = \sqrt{\frac{y}{2m - y}} dy. \quad (1).$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Afin de l'intégrer, remarquons que y devant être moindre que $2m$, nous pourrions poser :

$$y = m (1 - \cos \varphi). \quad (2).$$

par suite, en différentiant :

$$dy = m \sin \varphi \, d\varphi.$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$dx = \sqrt{\frac{m(1 - \cos \varphi)}{2m - m(1 - \cos \varphi)}} m \sin \varphi \, d\varphi,$$

d'où l'on tire successivement :

$$dx = m \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$dx = m \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}} \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$dx = m \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \, d\varphi,$$

$$dx = 4m \sin^2 \frac{\varphi}{2} \, d\frac{\varphi}{2}.$$

et en intégrant :

$$x = 4m \int \sin^2 \frac{\varphi}{2} \, d\frac{\varphi}{2}. \quad (3),$$

or :

$$\int \sin^2 \frac{\varphi}{2} \, d\frac{\varphi}{2} = -\frac{1}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{2} \quad (\text{intég. n}^\circ \text{ II, page 169});$$

En portant cette valeur dans (3), il vient :

$$x = -2m \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + m\varphi,$$

$$x = -m \sin \varphi + m\varphi + C. \quad (u).$$

il suffit maintenant, de remplacer dans cette équation, φ par sa valeur en fonction de y .

L'équation (2) donne :

$$\cos \varphi = \frac{m - y}{m},$$

d'où :

$$\varphi = \arccos \frac{m-y}{m},$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{(m-y)^2}{m^2}} = \frac{1}{m} \sqrt{2my - y^2}.$$

Prenant pour $\sin \varphi$, la valeur négative du radical; il vient par substitution dans (u) :

$$x = m \arccos \frac{m-y}{m} + \sqrt{2my - y^2}.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée.

Cette courbe est donc une cycloïde dont le point générateur est situé sur un cercle de rayon m .

XIII. *Trouver une courbe telle, que la tangente en un point, fasse avec le rayon vecteur de ce point un angle constant.*

V étant l'angle que la tangente à une courbe exprimée en coordonnées polaires, fait avec le rayon vecteur du point de contact dont les coordonnées sont r et θ ; on a :

$$\operatorname{tg} V = \frac{r \, d\theta}{dr}.$$

Si donc C est la tangente de l'angle constant, on a :

$$\frac{r \, d\theta}{dr} = c.$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Cette équation donne successivement :

$$\frac{dr}{r} = \frac{d\theta}{c} = d \frac{\theta}{c}$$

$$d \log r = d \frac{\theta}{c}$$

et en intégrant :

$$\log r = \frac{\theta}{c} c'$$

ou bien :

$$r = e^{\frac{\theta}{c} c'},$$

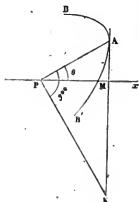
et en appelant m le rapport $\frac{e'}{e}$:

$$r = e^{m\theta}.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée.

Cette courbe est la spirale logarithmique.

XIV. Soient Px l'axe polaire et P le pôle, trouver une courbe BB' telle que : en menant la tangente AK , en un quelconque de ses points, que l'on termine à la perpendiculaire PK élevée au pôle sur le rayon vecteur du point de contact, on ait :



$$\frac{\text{surf. PAK}}{\text{surf. PAM}} = C \dots (1),$$

C étant une constante.

Sur la figure, on a :

$$\begin{aligned} \text{surf. APK} &= \frac{1}{2} PK \cdot AP = \\ &= \frac{1}{2} r^2 \operatorname{tg} \text{PAK}, \end{aligned}$$

or :

$$\operatorname{tg} \text{PAK} = \frac{r \, d\theta}{dr},$$

donc :

$$\text{surf. APK} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dr},$$

on sait, en outre, que :

$$\text{aire MAP} = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta.$$

L'équation de condition (1), devient donc par substitution :

$$\frac{r^2 \frac{d\theta}{dr}}{\int r^2 d\theta} = C,$$

d'où :

$$\frac{r^3}{\frac{dr}{d\theta}} = G \int r^3 d\theta,$$

et en différenciant :

$$\frac{3 r^2 \frac{dr^2}{d\theta} - r^3 \frac{d^2 r}{d\theta^2}}{\frac{dr^2}{d\theta^2}} = C r^3 d\theta,$$

et par suite en divisant par $d\theta$ et réduisant :

$$r \frac{d^2 r}{d\theta^2} + (C - 3) \frac{dr^2}{d\theta^2} = 0. \quad (2).$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.
Pour l'intégrer posons :

$$\frac{dr}{d\theta} = p, \quad \text{d'où :} \quad \frac{d^2 r}{d\theta^2} = \frac{dp}{d\theta}.$$

L'équation (2) devient alors par substitution :

$$r \frac{dp}{d\theta} - (C - 3) p^2 = 0,$$

ou ce qui est la même chose, puisque $p^2 = p \cdot p = p \frac{dr}{d\theta}$,

$$r \frac{dp}{d\theta} + (C - 3) p \frac{dr}{d\theta} = 0.$$

Cette équation donne successivement :

$$r dp + (C - 3) p dr = 0,$$

$$\frac{dp}{p} = (3 - C) \frac{dr}{r},$$

et en intégrant :

$$\log p = \log r^{3-C},$$

d'où, A étant une constante arbitraire :

$$p = A r^{3-C}.$$

La substitution de $\frac{dr}{d\theta}$ à la place de p donne dans cette équation :

$$\frac{dr}{d\theta} = A r^{3-C},$$

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dr}{r^{3-C}} = d\theta,$$

$$\frac{1}{A} r^{C-3} dr = d\theta,$$

d'où, en intégrant, il vient, α étant une constante arbitraire :

$$\theta - \alpha = \frac{1}{A(C-2)} r^{C-2},$$

et si l'on appelle B le produit $A(C-2)$, on a finalement :

$$r^{C-2} = B(\theta - \alpha).$$

Telle est l'équation du lieu cherché.

Cas particuliers. — 1° $C = \infty$.

L'équation que nous venons de trouver :

$$r^{C-2} = B(\theta - \alpha),$$

peut s'écrire ainsi :

$$r = B^{\frac{1}{C-2}} (\theta - \alpha)^{\frac{1}{C-2}},$$

ou plus simplement en appelant b l'expression $B^{\frac{1}{C-2}}$:

$$r = b(\theta - \alpha)^{\frac{1}{C-2}}.$$

Pour $C = \infty$, $\frac{1}{C-2} = 0$, et par suite :

$$r = b = \text{constante}.$$

$r = \text{constante } b$, représente un cercle de rayon b ayant le pôle pour centre; on vérifie aisément sur cette courbe l'hypothèse $C = \infty$, introduite dans l'énoncé de la question.

2° $C = 2$. — Reprenons l'équation obtenue plus haut :

$$r dp + (c-3) p dr = 0.$$

pour $C = 2$, elle devient :

$$r dp = p dr,$$

d'où :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dr}{r},$$

et en intégrant :

$$\log p = \log r,$$

par suite, m étant une constante :

$$p = m r,$$

or :

$$p = \frac{dr}{d\theta},$$

donc :

$$\frac{dr}{r} = m d\theta,$$

$$\log r = m\theta,$$

et enfin, A étant une nouvelle constante :

$$r = A e^{m\theta}.$$

Cette équation est celle de la *spirale logarithmique*.

On vérifie aisément sur cette courbe, l'hypothèse $C = 2$, introduite dans l'énoncé de la question.

3° $C = 3$. L'équation générale du lieu :

$$r^C - 2 = B(\theta - \alpha),$$

devient pour $\theta = 3$:

$$r = B(\theta - \alpha).$$

Cette équation est celle de la *spirale d'Archimède*.

4° $C = 1$. L'équation générale du lieu :

$$r^C - 2 = B(\theta - \alpha),$$

devient pour $C = 1$:

$$\frac{1}{r} = B(\theta - \alpha),$$

d'où :

$$r(\theta - \alpha) = \frac{1}{B} = \text{constante.}$$

Cette équation est celle de la spirale hyperbolique.

XV. Trouver une courbe, dans laquelle : le rayon de courbure soit proportionnel à la normale.

Soient R et N le rayon de courbure et la normale en un point x, y de la courbe cherchée, alors :

$$R = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad N = y \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = y \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, si m est le rapport constant qui existe entre le rayon de courbure et la normale, on a :

$$\frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = my \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1).$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Avant de l'intégrer, nous remarquerons que les valeurs de R et de N, étant ici prises en valeurs absolues, cela indique que le rayon de courbure et la normale en un même point sont directement opposés, m étant supposé positif.

Arrivons à l'intégration et supprimons d'abord le facteur

$\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ commun aux deux membres de l'équation (1), nous au-

rons en chassant le dénominateur $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = my \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \quad (2).$$

Posons :

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

d'où :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dp}{dy}$$

et par suite :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{p \, dp}{dy}$$

L'équation (2) devient donc par substitution :

$$1 + p^2 = my \frac{p \, dp}{dy},$$

d'où :

$$\frac{dy}{y} = \frac{m}{2} \frac{2p \, dp}{1 + p^2},$$

ou bien :

$$\frac{dy}{y} = \frac{m}{2} \frac{d(1 + p^2)}{1 + p^2},$$

d'où en intégrant, C étant une constante :

$$\log Cy = \frac{m}{2} \log(1 + p^2),$$

Par suite :

$$Cy = (1 + p^2)^{\frac{m}{2}},$$

et en remplaçant p par sa valeur $\frac{dy}{dx}$, et extrayant la racine $\frac{m}{2}$ de part et d'autre :

$$C^{\frac{2}{m}} y^{\frac{2}{m}} = 1 + \frac{dy^2}{dx^2},$$

d'où :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{C^{\frac{2}{m}} y^{\frac{2}{m}} - 1}},$$

et en intégrant, il vient, a étant une constante arbitraire :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{C^{\frac{2}{m}} y^{\frac{2}{m}} - 1}} \quad (u).$$

Telle est l'expression qu'il s'agirait d'intégrer, m étant quelconque.

EXAMEN DE QUELQUES VALEURS PARTICULIÈRES ATTRIBUÉES A m .

Cas où $m = 1$. Pour $m = 1$, l'équation (h) devient :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}},$$

d'où :

$$x - a = \frac{1}{C} \int \frac{dCy}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}}$$

mais on sait que $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \log(u + \sqrt{u^2 - 1})$, donc :

$$x - a = \frac{1}{C} \log(Cy + \sqrt{C^2 y^2 - 1}). \quad (1).$$

Cette équation donne en multipliant, haut et bas entre parenthèses, par $Cy - \sqrt{C^2 y^2 - 1}$:

$$x - a = \frac{1}{C} \log\left(\frac{1}{Cy - \sqrt{C^2 y^2 - 1}}\right),$$

et puisque $\log\left(\frac{a}{b}\right) = -\log\left(\frac{b}{a}\right)$, il vient :

$$x - a = -\frac{1}{C} \log(Cy - \sqrt{C^2 y^2 - 1}),$$

ou bien :

$$-(x - a) = \frac{1}{C} \log(Cy - \sqrt{C^2 y^2 - 1}). \quad (2).$$

Les équations (1) et (2) donnent, après y avoir chassé le dénominateur C :

$$e^{C(x-a)} = Cy + \sqrt{C^2 y^2 - 1}$$

$$e^{-C(x-a)} = Cy - \sqrt{C^2 y^2 - 1}.$$

d'où en ajoutant et divisant par $2C$ de part et d'autre, il vient finalement :

$$y = \frac{1}{2C} [e^{C(x-a)} + e^{-C(x-a)}].$$

Telle est l'équation du lieu, pour le cas où $m = 1$.

Pour plus de simplicité si l'on transporte l'axe des y parallèlement à lui-même au point dont l'abscisse est a , l'équation du lieu devient :

$$y = \frac{1}{2C} [e^{Cx} + e^{-Cx}].$$

Cette équation est celle d'une chaînette dont l'axe est l'axe des y .

Donc : dans la chaînette le rayon de courbure et la normale en un même point sont égaux et directement opposés à partir du point de contact.

On vérifie aisément cette propriété.

Cas où $m = 1$. Pour $m = -1$, l'équation (h) devient :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2 y^2 - 1}}.$$

d'où, par transformations successives :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{1}{C^2 y^2} - 1}}$$

$$x - a = \int \frac{Cy dy}{\sqrt{1 - C^2 y^2}}.$$

et si l'on remarque que Cy devant être moindre que 1, on peut poser $Cy = \sin \varphi$; on trouve :

$$x - a = \frac{1}{C} \sqrt{1 - C^2 y^2}.$$

Puis en élevant au carré :

$$(x - a)^2 + Cy^2 = \frac{1}{C^2}.$$

Telle est dans le cas de $m = -1$, l'équation du lieu.

Cette équation est celle d'un cercle dont le centre est sur l'axe des x .

Donc : dans un cercle dont le centre est situé sur l'axe des x , la normale est égale au rayon de courbure et ces deux lignes sont dirigées dans le même sens, ce qui est évident.

Cas où $m = 2$. Alors que $m = 2$, l'équation (h) devient :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{Cy - 1}}.$$

d'où, par des transformations successives :

$$x - a = \frac{1}{C} \cdot \int \frac{dCy}{\sqrt{Cy - 1}}$$

$$x - a = \frac{1}{C} \cdot \int \frac{d(Cy - 1)}{\sqrt{Cy - 1}}$$

$$x - a = \frac{1}{C} \cdot \int (Cy - 1)^{-\frac{1}{2}} d(Cy - 1)$$

$$x - a = \frac{2}{C} (Cy - 1)^{-\frac{1}{2}} + 1.$$

$$x - a = \frac{2}{C} (Cy - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

et en élevant au carré il vient finalement :

$$C^2 (x - a)^2 = 4Cy - 4.$$

Telle est l'équation du lieu dans le cas où $m = 2$.

Cette équation est celle d'une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x .

Donc : dans une parabole, dont l'axe est perpendiculaire à l'axe des x , le rayon de courbure est double de la normale et ces deux lignes sont dirigées en sens contraires, à partir du point de contact.

Cas où $m = -2$. Si $m = -2$, l'équation (h) devient :

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{C^{-1}y^{-1} - 1}}$$

d'où par des transformations successives : en posant pour plus de simplicité $C = \frac{1}{2b}$

$$x - a = \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{2b}{y} - 1}}$$

$$x - a = \int \frac{\sqrt{y} \cdot dy}{\sqrt{2b - y}}$$

Ici y doit être moindre que $2b$, nous poserons :

$$y = 2b \sin^2 \varphi.$$

d'où :

$$dy = 4b \sin \varphi \cos \varphi d\varphi.$$

et par substitution :

$$x - a = \int \frac{\sqrt{2b} \sin \varphi \cdot 4b \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}{\sqrt{2b} \cos \varphi} = 4b \int \sin^2 \varphi d\varphi.$$

mais on a trouvé (intég. n° II, page 169) :

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\varphi}{2}.$$

donc :

$$x - a = -2b \sin \varphi \cos \varphi + 2b \varphi. \quad . \quad . \quad . \quad a$$

l'équation $y = 2b \sin^2 \varphi$ donne :

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{y}{2b}}, \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - \frac{y}{2b}} = \frac{1}{\sqrt{b^2}} \cdot \sqrt{2b - y}.$$

$$\varphi = \arccos \sqrt{\frac{2b - y}{2b}}.$$

L'équation (a) devient donc par substitution, en prenant le signe — du radical

$$x - a = \sqrt{2by - y^2} + 2b \arccos \sqrt{\frac{2b - y}{2b}}.$$

Telle est l'équation du lieu, dans le cas où $m = -2$.

Et si pour plus de simplicité, on transporte l'axe des y parallèlement à lui-même, au point dont l'abscisse est a ; cette équation devient :

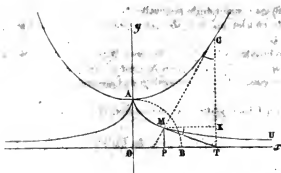
$$x = \sqrt{2by - y^2} + 2b \arccos \sqrt{\frac{2b - y}{2b}}.$$

Cette équation est celle d'une cycloïde.

Donc : dans la cycloïde le rayon de courbure est double de la normale et ces deux lignes se comptent dans le même sens, à partir du point de contact.

XVI. Trouver une courbe, dans laquelle : la longueur de la tangente en un point quelconque, comprise entre le point de contact et l'axe des x , soit constante et égale à une ligne donnée m .

Soient $y_0, 0x$ les axes coordonnés, supposés rectangulaires.



Sur l'axe des y , à partir de l'origine prenons une longueur $OA = m$, alors A est un point de la courbe et cette courbe part de A tangentielle-ment à l'axe des y .

T étant la longueur de la tangente en un point x, y de la courbe on a :

$$T = y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}.$$

L'équation différentielle de la courbe cherchée est donc :

$$y \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = m.$$

de cette équation on tire :

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1} = \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y}.$$

$$dx = \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} dy.$$

Par un point pris hors d'une droite, on peut mener à cette droite deux lignes d'une même longueur; nous conviendrons : du côté des x positifs, de prendre de ces deux lignes, celle dont l'inclinaison sur l'axe des x est plus grande que 90° . Nous prendrons donc $\frac{dx}{dy}$ avec le signe $-$.

Pour intégrer cette équation, on remarquera qu'ici y doit être moindre que m ; on posera alors $y = m \sin \varphi$, et l'on trouvera comme dans le problème XI qui précède :

$$x = -\sqrt{m^2 - y^2} + m \log \left(\frac{m}{y} + \sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1} \right) + C.$$

Telle est l'équation de la courbe cherchée.

Cette courbe présente des particularités curieuses. Nous allons les étudier.

Je remarque d'abord que la constante C est nulle. En effet, pour $y = m$, on doit avoir le point A , c'est-à-dire que pour $y = m$, $x = 0$.

Pour $y = m$ le second membre de l'intégration se réduit à C ; donc $C = 0$.

La véritable équation du lieu est donc :

$$x = -\sqrt{m^2 - y^2} + m \cdot \log \left(\frac{m}{y} + \sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1} \right).$$

ou bien :

$$x = -\sqrt{m^2 - y^2} + m \cdot \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \right).$$

Forme de la courbe. — La courbe est évidemment symétrique par rapport à l'axe des y .

La plus grande valeur de y est m , et à mesure que l'ordonnée y diminue de m jusqu'à zéro, l'abscisse x augmente constamment et a pour limite l'infini.

Donc la courbe part de A tangentiellement à l'axe des y et s'approche indéfiniment de l'axe des x qu'elle rencontre à l'infini.

L'axe des x est donc asymptote de la courbe.

Pour avoir la tangente en un point quelconque de la courbe, il suffira de décrire de ce point avec m pour rayon un cercle. Le point de rencontre de ce cercle avec l'axe des x , joint au point de la courbe, donnera la tangente.

La courbe a donc la forme indiquée sur la figure.

Aire de la courbe. — L'aire A de la courbe comprise entre l'origine et l'abscisse x a pour expression :

$$A = \int_0^x y dx.$$

or l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y}$$

donne :

$$dx = -\frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y} dy$$

A devient donc en y remplaçant dx par cette valeur :

$$A = \int_0^x -\sqrt{m^2 - y^2} dy.$$

Cherchons l'aire $\int_0^\infty$ comprise entre l'axe des y , l'axe des x et la

branche infinie AU; à cet effet, puisque sous le signe $\int$ se trouve une fonction de y , remplaçons les limites 0 et ∞ de x , par les limites correspondantes de y , lesquelles sont m et 0; en sorte que nous aurons pour l'expression de l'aire totale :

$$A = \int_m^0 -\sqrt{m^2 - y^2} dy.$$

quand on renverse les limites de l'intégrale définie on sait que l'on change le signe de cette intégrale, donc :

$$A = \int_0^m \sqrt{m^2 - y^2} dy.$$

Cette intégrale définie est celle d'un cercle, on sait en effet que

$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx$ représente l'aire du quart de cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 = R^2$; donc l'aire totale A, est celle du quart de cercle dont l'équation est $x^2 + y^2 = m^2$; c'est-à-dire que l'aire totale A, est équivalente à celle du quart de cercle OAB décrit de l'origine comme centre avec OA ou m comme rayon.

Remarque sur l'expression de l'abscisse à l'origine de la tangente à la courbe.

Soit M un point de la courbe dont l'ordonnée y est MP; menons la tangente MT en ce point, alors $MT = m$ (c'est la définition de la courbe).

L'abscisse à l'origine de la tangente MT est OT et sur la figure on a :

$$\begin{aligned} OT &= OP + TP \\ OT &= x + \sqrt{m^2 - y^2}. \end{aligned}$$

or, l'équation de la courbe :

$$x = -\sqrt{m^2 - y^2} + m \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \right),$$

donne :

$$x + \sqrt{m^2 - y^2} = m \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \right).$$

La valeur de θT devient donc par substitution :

$$\theta T = m \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \right).$$

Calcul du rayon de courbure en un point de la courbe.

L'expression du rayon de courbure en un point x, y d'une courbe est :

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

x étant la variable indépendante. Puisqu'ici, l'équation est résolue par rapport à x , y est pris pour variable indépendante, en sorte que l'expression du rayon R est :

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x}{dy^2}},$$

L'équation différentielle :

$$\frac{dx}{dy} = -\sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1},$$

donne successivement :

$$1 + \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{m^2}{y^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dy^2} &= -\frac{d \left(\frac{m^2}{y^2} - 1 \right)}{2 \sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1}} = \frac{\frac{m^2}{y^3} dy}{\sqrt{\frac{m^2}{y^2} - 1}} = \frac{m^2 dy}{y^3 \sqrt{m^2 - y^2}} \\ \frac{d^2x}{dy^2} &= \frac{m^2}{y^3 \sqrt{m^2 - y^2}} \end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans R, il vient :

$$R = \frac{\left(\frac{m^2}{y^3}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{m^2}{y^3 \sqrt{m^2 - y^2}}} = \frac{\frac{m^3}{y^3}}{\frac{m^2}{y^3 \sqrt{m^2 - y^2}}}$$

d'où :

$$R = \frac{m \sqrt{m^2 - y^2}}{y}$$

Telle est l'expression du rayon de courbure.

Au point A, $y = m$, par suite $R = 0$; le point A est donc un point de la développée de la courbe proposée.

Construction géométrique du rayon et du centre de courbure.

Soit M un point de la courbe dont la tangente est MT, alors $MT = m$. Je mène la perpendiculaire MC sur MT, alors MC est la normale et si du point T, sur l'axe des x , j'élève la perpendiculaire TC laquelle rencontre la normale MC en C; je dis que le point C est le centre de courbure du point M de la courbe.

Il suffit, pour établir ce fait, de démontrer l'égalité :

$$MC = R = \frac{m \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \quad (b).$$

à cet effet, je mène la parallèle MK à l'axe des x :

Les deux triangles rectangles CMK et MTK sont semblables et nous donnent :

$$\frac{MC}{MT} = \frac{MK}{TK}$$

or, sur la figure :

$$MT = m, MK = TP = \sqrt{MT^2 - MP^2} = \sqrt{m^2 - y^2},$$

$$TK = MP = y,$$

par suite :

$$\frac{MC}{m} = \frac{\sqrt{m^2 - y^2}}{y},$$

d'où :

$$MC = \frac{m \sqrt{m^2 - y^2}}{y}$$

L'égalité (1) est donc démontrée.

Le point C est donc bien le centre de courbure.

Développée ou lieu des centres de courbure de la courbe.

Appelons α , ζ l'abscisse et l'ordonnée du point C et proposons nous de trouver l'équation qui lie entre elles, les quantités α et ζ .

Cette équation sera celle de la développée.

Sur la figure, on a :

$$CT = \zeta, \quad OT = \alpha.$$

Le triangle rectangle CAT donne :

$$MT^2 = CT \cdot TK. \quad \text{ou} \quad m^2 = \zeta \cdot y,$$

par suite :

$$y = \frac{m^2}{\zeta},$$

nous avons trouvé précédemment :

$$OT = m \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - y^2}}{y} \right),$$

donc, puisque $y = \frac{m^2}{\zeta}$, $OT = \alpha$:

$$\alpha = m \log \left(\frac{m + \sqrt{m^2 - \frac{m^4}{\zeta}}}{\frac{m^2}{\zeta}} \right),$$

d'où :

$$\alpha = m \log \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m} \right). \quad \dots \dots (c),$$

$$\frac{\alpha}{m} = \log \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m} \right),$$

et par suite :

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m}. \quad \dots \dots (d).$$

En changeant les signes de l'équation (c) et en la divisant par m , on a :

$$-\frac{\alpha}{m} = -\log \left(\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m} \right),$$

d'où :

$$-\frac{\alpha}{m} = -\log(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}) + \log m,$$

$$-\frac{\alpha}{m} = \log\left(\frac{m}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - m^2}}\right),$$

multipliant haut et bas entre parenthèses, par $\zeta - \sqrt{\zeta^2 - m^2}$, il vient :

$$-\frac{\alpha}{m} = \log\left(\frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m}\right),$$

d'où :

$$e^{-\frac{\alpha}{m}} = \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - m^2}}{m}.$$

et en ajoutant cette équation à l'équation (d), nous aurons :

$$e^{\frac{\alpha}{m}} + e^{-\frac{\alpha}{m}} = \frac{2\zeta}{m},$$

d'où l'on tire finalement :

$$\zeta = \frac{m}{2} \left(e^{\frac{\alpha}{m}} + e^{-\frac{\alpha}{m}} \right).$$

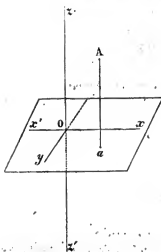
Telle est l'équation de la développée de la courbe.

Cette développée est donc une chaînette. Le point le plus bas de cette chaînette est le point A : car, la valeur minimum de ζ est donnée par $\alpha = 0$, et cette valeur minimum est $\zeta = m$.

NOTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS

DIMENSIONS.

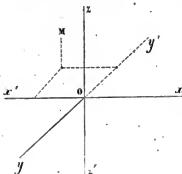
DÉTERMINATION D'UN POINT DANS L'ESPACE.



Un point A de l'espace est entièrement déterminé lorsqu'on connaît sa projection a sur un plan, et l'élévation Aa de ce point au-dessus de ce plan, ainsi que le sens, suivant lequel on doit porter cette élévation.

La projection a du point A , est déterminée par ses coordonnées prises par rapport à deux axes OX et OY (supposés rectangulaires pour plus de simplicité) tracés dans le plan.

Construisons un troisième axe OZ , perpendiculaire au plan des deux axes OX et OY et passant par l'origine O ; alors si nous convenons : de considérer comme



positives, les distances comptées suivant l'axe OZ lorsqu'elles seront au-dessus du plan XOY ; et comme négatives, les distances situées au-dessous de ce plan; nous introduisons pour la détermination du point A de l'espace trois coordonnées, lesquelles sont nécessaires et suffisantes.

Les trois plans qui passent par les trois axes coordonnés OX , OY , OZ sont perpendiculaires entre eux. On les nomme *plans coordonnés*. Ces trois plans déterminent huit angles trièdres. Les

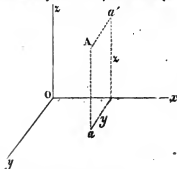
signes des trois coordonnées x, y, z d'un point, feront connaître celui des huit angles trièdres dans lequel est situé ce point.

Ainsi le point M dont les coordonnées sont :

$$x = -2, \quad y = -3, \quad z = +1,$$

se trouve dans le trièdre ZOXY'.

Remarque. — Un point de l'espace est situé à l'extrémité de la diagonale du parallépipède construit sur les trois coordonnées.



Remarque. — On voit sur la figure, que si l'on projette un point de l'espace sur deux plans coordonnés : la coordonnée de ce point comptée sur l'axe d'intersection de ces deux plans est commune aux deux projections du point.

Distance de deux points en fonction de leurs coordonnées rectangulaires.

Soient deux points M' et M'', dont les coordonnées rectangulaires sont x', y', z' et x'', y'', z'' . Sur la figure m' et m'' étant les projections de M' et M'' sur le plan XY, on a :

$$M'm' = z', \quad M''m'' = z''.$$

et si l'on mène la parallèle M'P à $m'm''$, le triangle rectangle M'M'P donne en appelant Δ la distance cherchée M'M'' :

$$\Delta^2 = m'm''^2 + (z'' - z')^2$$

mais on a trouvé (page 66)

$$m'm''^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2.$$

d'où par substitution :

$$\Delta^2 = (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2.$$

$$\Delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} \dots \quad (1)$$

Telle est l'expression de la distance cherchée.

Remarque I. Si l'un des points passe par l'origine, alors :

$$x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0.$$

par suite :

$$\Delta = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Remarque II. — En appliquant la formule (1) à deux points infiniment voisins dont les coordonnées sont x, y, z ; $x + dx, y + dy, z + dz$ et dont la distance est ds , on trouve :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Représentation géométrique d'une équation à une variable.

Soit une équation $f(x) = 0$.

Décomposée en facteurs du premier degré, cette équation est de la forme :

$$f(x) = (x - a)(x - b) \dots = 0.$$

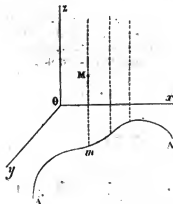
d'où :

$$x = a, \quad x = b, \quad x = b \dots$$

Si a est réel, le lieu de l'équation $x = a$ est tel, que pour tous ses points : son x est constante ; ce lieu est donc le plan parallèle au plan des YZ mené à une distance a de ce plan. De même, le lieu de l'équation $x = b$ est un plan parallèle au plan des YZ , si b est réel.

L'équation $f(x) = 0$ si elle a des racines réelles représente donc un nombre déterminé de plans parallèles au plan des YZ .

Représentation géométrique d'une équation à deux variables.



Soit l'équation à deux variables

$$f(x, y) = 0.$$

Sur le plan XY , l'équation $f(x, y) = 0$ représente une certaine courbe AA' ; et il est évident, que pour tout point M de l'espace, ayant pour projection sur le plan XY , un des points de la courbe AA' , les coordonnées de ce point M satisfont à l'équation proposée.

En effet, la projection m du point M étant sur AA' ; et a, c étant l' x et l' y de ce point, on a ;

$$f(a, c) = 0.$$

Or γ étant le z de M , puisque l'équation $f(x, y) = 0$ peut s'écrire $f(x, y, 0.z) = 0$; on a aussi :

$$f(a, c, 0.\gamma) = 0.$$

Les coordonnées du point M satisfont donc à l'équation proposée.

L'équation $f(x, y) = 0$ représente donc dans l'espace le lieu de toutes les parallèles à l'axe des z menées par les différents points de la courbe $f(x, y) = 0$ construite dans le plan XY .

Une équation à deux variables représente donc une surface cylindrique, dont la *génératrice* est parallèle à l'axe dont la coordonnée n'entre pas dans l'équation et dont la *directrice* a pour équation sur le plan perpendiculaire à cet axe, l'équation proposée.

Remarque. — Si l'équation $f(x, y) = 0$, est du premier degré : elle représentera un plan parallèle à l'axe des z , dont la trace sur le plan XY a pour équation $f(x, y) = 0$.

Représentation géométrique d'une équation à trois variables.

Soit une équation à trois variables :

$$f(x, y, z) = 0.$$

Cette équation est le résultat de l'élimination de z entre les deux équations :

$$z = a.$$

$$f(x, y, a) = 0.$$

la quantité a étant arbitraire.

En d'autres termes, les coordonnées d'un point quelconque du lieu de l'équation $f(x, y, z) = 0$ satisfont aux deux équations :

$$z = a, \quad f(x, y, a) = 0.$$

L'équation $z = a$, représente un plan parallèle au plan XY et l'équation $f(x, y, a) = 0$ représente une surface cylindrique dont la *génératrice* est parallèle à l'axe des z ; l'ensemble des deux équations :

$$z = a, \quad f(x, y, a) = 0.$$

représente donc la courbe d'intersection du plan et de la surface cylindrique.

De même, pour une autre valeur a' donnée à z , on obtiendra une nouvelle courbe et ainsi de suite; ces courbes seront très-rapprochées, si l'on suppose voisines les valeurs $a, a', \dots$ données à z .

L'équation $f(x, y, z) = 0$ qui donne ainsi toutes ces courbes, représente donc le lieu géométrique des positions voisines d'une ligne, c'est-à-dire une surface.

Remarque. — L'équation d'une surface étant du degré m , on voit que la surface ne pourra être rencontrée par une droite en plus de m points.

Une surface étant définie, trouver son équation.

La définition de la surface donnera pour un quelconque de ses points une relation entre les trois coordonnées x, y, z de ce point ; cette relation sera l'équation de la surface.

Exemple. — Équation de la sphère.

Appelons α, ζ, γ les coordonnées du centre, et R le rayon de la sphère. Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface ; sa distance au centre est R . Pour exprimer cette relation on a d'après la formule de la distance de deux points :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \zeta)^2 + (z - \gamma)^2 = R^2.$$

Telle est l'équation de la sphère.

Représentation d'une ligne de l'espace.

Une ligne est déterminée par ses projections sur deux plans ; si donc nous prenons pour plans de projections le plan des ZX et le plan des ZY ; nous représenterons une ligne par les équations :

$$(1) \dots x = F(z), \quad y = \varphi(z).$$

des projections de cette ligne sur les plans ZX et ZY.

L'élimination de z entre les équations (1), donne une équation fonction de x et de y , laquelle est celle de la projection de la ligne sur le plan XY.

Représentation de la ligne droite.

La projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite ; donc une ligne droite de l'espace sera représentée par les équations :

$$x = az + p$$

$$y = bz + q$$

de ses projections sur les plans XZ et YZ.

Parallélisme de deux droites.

Les équations de deux droites étant :

$$\begin{aligned}x &= ax + p. & . & . & . & & x &= a'x + p' \\ y &= bx + q. & . & . & . & & y &= b'x + q'.\end{aligned}$$

pour qu'elles soient parallèles, il faut que l'on ait :

$$a = a' \quad b = b'.$$

On sait, en effet, que si deux droites sont parallèles, leurs projections le sont aussi et réciproquement.

Équations de la droite qui passe par deux points donnés x', y', z' ; x'', y'', z'' .

Les équations de la droite cherchée sont de la forme :

$$\left. \begin{aligned}x &= az + p \\ y &= bz + q\end{aligned} \right\} . & . & . & . & . & (1)$$

les inconnues sont les constantes a, b, p, q .

Les deux points devant se trouver sur la droite, on a les équations :

$$x' = az' + p.$$

$$y' = bz' + q.$$

$$x'' = az'' + p.$$

$$y'' = bz'' + q.$$

La substitution des valeurs de p, q, a et b tirées de ces quatre équations, dans les équations (1), donne, pour les équations de la droite cherchée :

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'} (z - z').$$

$$y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'} (z - z').$$

Équations d'une droite passant par un point donné x', y', z' .

Les équations de la droite cherchée sont :

$$x - x' = a. (z - z').$$

$$y - y' = b. (z - z').$$

Les coefficients a et b, y sont indéterminés. On sait pourquoi.

Remarque. — Si la droite passant par le point x', y', z' devait en outre, être parallèle à une droite donnée; les coefficients angulaires a et b des projections de la droite cherchée, seraient ceux de la droite donnée.

Calcul des coordonnées du point de rencontre de deux droites.

Soient les équations des deux droites données :

$$\begin{aligned}x &= az + p & x &= a'z + p' \\ y &= bz + q. & y &= b'z + q'.\end{aligned}$$

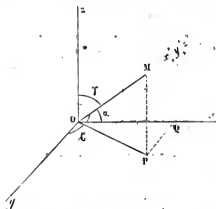
Les coordonnées de leur point de rencontre doivent satisfaire à ces équations. Pour avoir les coordonnées de ce point, il suffit donc de résoudre les quatre équations ci-dessus.

Ici le nombre des équations est supérieur d'une unité à celui des inconnues, il y aura donc une équation de condition, laquelle est :

$$\frac{p' - p}{q' - q} = \frac{a' - a}{b' - b}.$$

Cette équation exprime donc la condition qui doit exister pour que deux droites se coupent, c'est-à-dire pour qu'elles soient dans un même plan.

Angle d'une droite avec les trois axes coordonnés.



Soit OM la parallèle à la droite, menée par l'origine; prenons $OM = 1$ et soient x', y', z' les coordonnées du point M, alors :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1.$$

Sur la figure on a, en désignant par α, β et γ les angles cherchés :

$$x' = \cos \alpha, \quad y' = \cos \beta,$$

$$z' = \cos \gamma.$$

Les équations de la droite OM sont :

$$x = az, \quad y = bz.$$

a et b sont des nombres donnés, et puisque x', y', z' est sur la droite on a :

$$x' = az', \quad y' = bz'.$$

La résolution des six équations :

$$\begin{aligned} x' &= \cos \alpha, & y' &= \cos \zeta, & z' &= \cos \gamma, \\ x' &= az', & y' &= bz', & x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 1, \end{aligned}$$

donne :

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \zeta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

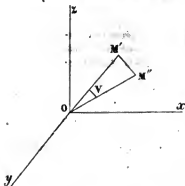
Remarque. — La somme des carrés de ces trois inconnues est l'unité.

Donc : la somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite fait avec trois axes rectangulaires, est égale à l'unité.

Et plus généralement :

La somme des carrés des cosinus des angles, que la diagonale d'un parallélépipède rectangle fait avec les trois arêtes est égale à l'unité.

Expression du cosinus de l'angle de deux droites en fonction des cosinus des angles que ces droites font avec les axes.



|| Soient deux droites OM' , OM'' passant par l'origine.

Prenons $OM' = OM'' = 1$.

Appelons : x' , y' , z' ; x'' , y'' , z'' les coordonnées des points M' et M'' ; puis V , l'angle des deux droites et α , ζ , γ , α' , ζ' , γ' les angles que ces droites font avec les trois axes.

Alors, d'après ce qui précède :

$$(1) \begin{cases} x' = \cos \alpha, & y' = \cos \zeta, & z' = \cos \gamma \dots \cos^2 \alpha + \cos^2 \zeta + \cos^2 \gamma = 1, \\ x'' = \cos \alpha', & y'' = \cos \zeta', & z'' = \cos \gamma' \dots \cos^2 \alpha' + \cos^2 \zeta' + \cos^2 \gamma' = 1. \end{cases}$$

Le triangle $M'OM''$ donne :

$$\overline{M'M''}^2 = \overline{OM'}^2 + \overline{OM''}^2 - 2\overline{OM'} \cdot \overline{OM''} \cdot \cos V = 2 - 2 \cos V.$$

$$\begin{aligned} \overline{M'M''}^2 &= (x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2 = \\ &= x''^2 + y''^2 + z''^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 2x'x'' - 2y'y'' - 2z'z''. \end{aligned}$$

et à cause des équations (1) :

$$2 - 2 \cos V = 2 - 2 \cos \alpha \cos \alpha' - 2 \cos \zeta \cos \zeta' - 2 \cos \gamma \cos \gamma'$$

D'où finalement :

$$\cos V = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \zeta \cos \zeta' + \cos \gamma \cos \gamma'.$$

c'est-à-dire que :

Le cosinus de l'angle de deux droites, est égal à la somme des produits des cosinus des angles, que font respectivement les deux droites, avec chacun des axes coordonnés.

Définition et équation du plan.

Le plan est la surface engendrée par une droite mobile, qui en s'appuyant constamment sur une droite fixe, reste toujours parallèle à une même direction.

La droite mobile prend le nom de *génératrice* et la droite fixe est dite *directrice*.

Ceci posé, soient

$$x = az + p, \quad y = bz + q. \quad \dots \quad (1)$$

les équations de la génératrice. Puisque la génératrice reste constamment parallèle à elle-même, les coefficients a et b sont constants; au contraire p et q varient pour chaque position de la génératrice.

Soient :

$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q'$$

les équations de la directrice; alors a' , b' , p' et q' sont des constantes pour un même plan.

Exprimons d'abord que la génératrice s'appuie sur la directrice, c'est-à-dire la rencontre, nous aurons l'équation :

$$\frac{p' - p}{a' - a} = \frac{q' - q}{b' - b}. \quad \dots \quad (2)$$

Et afin d'éliminer les indéterminées p et q portant dans (2) les valeurs $p = x - az$, $q = y - bz$ tirées de (1), il vient ainsi :

$$\frac{p' + az - x}{a' - a} = \frac{q' + bz - y}{b' - b}.$$

Telle est la relation qui existe entre les coordonnées d'un point quelconque de la génératrice indépendamment de la position particulière qu'elle peut occuper.

C'est donc l'équation du plan.

Cette équation est du premier degré en x , y , z .

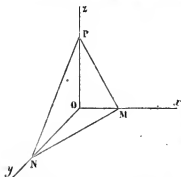
Réciproquement. — Toute équation du premier degré à trois variables représente un plan.

En effet, l'équation générale du premier degré à trois variables :

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

étant du premier degré, représente une surface, laquelle ne peut être rencontrée par une droite en plus d'un point; cette surface est donc plane.

Équation d'un plan en fonction de ses coordonnées à l'origine.



Soient M, N, P les trois points de rencontre d'un plan avec les trois axes.

Les distances OM, ON, OP que nous désignerons par p , q , r sont dites, les coordonnées à l'origine du plan.

Les coordonnées des points M, N, P, sont :

$$M \begin{cases} x = p, \\ y = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad N \begin{cases} x = 0, \\ y = q, \\ z = 0, \end{cases} \quad P \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \\ z = r. \end{cases}$$

Soit $Ax + By + Cz + D = 0$, l'équation du plan.

Les points M, N, P étant sur ce plan, leurs coordonnées satisfont à l'équation de la surface et l'on a :

$$Ap + D = 0. \quad \dots \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{D}{p},$$

$$Bq + D = 0. \quad \dots \quad B = -\frac{D}{q},$$

$$Cr + D = 0. \quad \dots \quad C = -\frac{D}{r}.$$

la substitution des valeurs de A, B, C, dans l'équation du plan, donne après toutes réductions :

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

Telle est l'équation cherchée.

Des problèmes sur le plan.

Pour résoudre sur le plan les problèmes résolus sur la ligne droite dans la géométrie à deux dimensions, on suivra la marche indiquée dans cette partie du cours.

On trouvera ainsi :

1° Pour l'équation du plan qui passe par un point $x' y' z'$.

$$A (x - x') + B (y - y') + C (z - z') = 0,$$

ou bien :

$$z - z' = a (x - x') + b (y - y') ;$$

2° Pour l'équation du plan qui passe par trois points donnés $x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z'''$,

$$\frac{(y' - y')(x - x') - (x'' - x')(y - y')}{(y' - y')(x''' - x') - (x'' - x')(y''' - y')} = \frac{(y' - y')(z - z') - (z'' - z')(y - y')}{(y' - y')(z''' - z') - (z'' - z')(y''' - y')} = 0$$

3° L'intersection de deux plans sera donnée par la combinaison des équations.

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

de ces plans.

L'élimination de y entre ces deux équations donnera la projection de l'intersection sur le plan Xz .

APPENDICE.

DE QUELQUES QUESTIONS

QUI RENCONTRENT LEUR APPLICATION EN MÉCANIQUE.

I. INTÉGRER L'ÉQUATION :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y.$$

Remarquons que l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$ se déduit de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2y$, en remplaçant dans cette dernière n par $n\sqrt{-1}$; or, nous avons trouvé (intég. X, page 162), que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = n^2y$ est :

$$y = Ae^{nx} + Be^{-nx}.$$

Si donc, dans cette équation, nous remplaçons n par $n\sqrt{-1}$, nous aurons, pour l'intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$, la fonction :

$$y = Ae^{nx\sqrt{-1}} + Be^{-nx\sqrt{-1}}. \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

mais on a trouvé (pages 116 et 117) :

$$e^{nx\sqrt{-1}} = \cos nx + \sqrt{-1} \sin nx,$$

$$e^{-nx\sqrt{-1}} = \cos nx - \sqrt{-1} \sin nx.$$

L'équation (1) devient donc par substitution :

$$y = (A + B) \cos nx + (A \sqrt{-1} - B \sqrt{-1}) \sin nx,$$

ou plus simplement, P et Q étant des facteurs constants :

$$y = P \cos nx + Q \sin nx.$$

Telle est la fonction cherchée.

II. DÉFINITION ET DÉTERMINATION DE LA COURBE-ENVELOPPE D'UNE COURBE DONNÉE.

Soit une courbe dont l'équation $f(x, y, a) = 0$, contient une constante a que l'on met en évidence.

Pour une valeur différente de a , la courbe $f(x, y, a) = 0$, représente une autre courbe, de même forme et de même nature, or, si l'on fait passer la constante a d'une manière continue par toutes les grandeurs, l'équation $f(x, y, a) = 0$, donnera lieu à une infinité de courbes de même nature, lesquelles seront infiniment voisines. Toutes ces courbes se coupent entre elles, et le lieu de leurs intersections successives prend le nom de *courbe-enveloppe* de la courbe proposée.

Proposons-nous de calculer l'équation de la courbe-enveloppe d'une courbe donnée par son équation.

Soit $f(x, y, a) = 0$, l'équation d'une courbe dans laquelle on fait varier la constante a .

Soit $a + \Delta a$ une valeur voisine de a , pour cette valeur on obtient une courbe dont l'équation est :

$$f(x, y, a + \Delta a) = 0.$$

Appelons X et Y les coordonnées du point de rencontre des deux courbes $f(x, y, a) = 0$ et $f(x, y, a + \Delta a)$; ce point étant sur chacune des courbes, on a :

$$f(X, Y, a) = 0. \quad (1),$$

$$f(X, Y, a + \Delta a) = 0,$$

par suite :

$$f(X, Y, a + \Delta a) - f(X, Y, a) = 0,$$

d'où, en divisant par Δa :

$$\frac{f(X, Y, a + \Delta a) - f(X, Y, a)}{\Delta a} = 0.$$

Cette équation a lieu quel que soit Δa ; en sorte que, si l'on passe à la limite de Δa , elle existe encore; pour cette limite, son premier membre devient $\frac{df}{da}$, c'est-à-dire que son premier membre est la dérivée de la fonction $f(x, y, a)$ prise par rapport à a considérée comme seule variable. L'équation $\frac{df}{da}$ est une fonction de X , Y et de a .

Si donc, on élimine a entre les équations $\frac{df}{da}$ et $f(X, Y, a)$ ou (1), on trouvera une équation en X et Y , laquelle sera celle du lieu cherché.

Donc: pour avoir l'équation de la courbe-enveloppe d'une courbe donnée, dans laquelle on fait varier une constante; il faut éliminer cette constante entre cette équation et la dérivée de cette équation prise par rapport à la constante considérée comme seule variable.

Application. — Proposons-nous de calculer l'équation de la courbe-enveloppe, de la trajectoire dans le vide.

Soit l'équation de la trajectoire dans le vide :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha} \quad (1).$$

Il s'agit de déterminer la courbe-enveloppe de cette trajectoire, en y faisant varier la constante α .

L'équation (1) peut s'écrire ainsi :

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2}{4h} \cos^{-2} \alpha.$$

la dérivée de cette équation, prise par rapport à α considérée comme seule variable, est :

$$0 = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{x^2}{4h} 2 \cos^{-3} \alpha \sin \alpha,$$

ou bien :

$$0 = \frac{2hx - x^2 \operatorname{tg} \alpha}{2h \cos^2 \alpha}.$$

et par suite :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{x},$$

Si l'on porte cette valeur de $\operatorname{tg} \alpha$ dans (1), il vient :

$$y = x \frac{2h}{x} - \frac{x^2}{4h} \left(1 + \frac{4h^2}{x^2} \right),$$

d'où :

$$y = h - \frac{x^2}{4h}.$$

Telle est l'équation de la courbe-enveloppe, de la trajectoire dans le vide.

Cette courbe-enveloppe, comme la trajectoire, est une parabole.

III. ÉQUATION DU PLAN OSCULATEUR D'UNE COURBE À DOUBLE COURBURE.

Par *plan osculateur* d'une courbe à double courbure, en un point de cette courbe, on entend le plan-limite du plan qui passe par ce point et deux autres points voisins situés sur la courbe, lorsque les deux points tendent à se confondre avec le premier.

Proposons-nous de calculer l'équation du plan osculateur d'une courbe à double courbure, en un point dont les coordonnées sont x', y', z' .

Si l'on donne à x', y', z' les accroissements $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$, on aura les coordonnées d'un second point, voisin du premier; les coordonnées de ce second point seront :

$$x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z'.$$

Si, aux coordonnées de ce second point, on donne les accroissements $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$, on obtient les coordonnées du troisième point, voisin du second, les coordonnées de ce troisième point seront alors :

$$x' + \Delta x' + \Delta(x' + \Delta x'), y' + \Delta y' + \Delta(y' + \Delta y'), z' + \Delta z' + \Delta(z' + \Delta z'),$$

ou, d'après la remarque faite sur la différence d'une somme (page 152) :

$$x' + 2\Delta x' + \Delta^2 x', y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y', z' + 2\Delta z' + \Delta^2 z'.$$

Calculons l'équation du plan qui passe par les trois points

$$\begin{aligned} & x', y', z', \\ & (x' + \Delta x', y' + \Delta y', z' + \Delta z') \text{ et } \\ & (x' + 2\Delta x' + \Delta^2 x', y' + 2\Delta y' + \Delta^2 y', z' + 2\Delta z' + \Delta^2 z'). \end{aligned}$$

Devant passer par le premier point x', y', z' , l'équation du plan cherché sera de la forme (page 374).

$$z - z' = a(x - x') + b(y - y'). \quad . \quad . \quad (1).$$

Ici a et b sont inconnues. en exprimant que l'équation de ce plan est satisfaite par les coordonnées des deux autres points, nous aurons les deux équations :

$$\begin{aligned}\Delta z' &= a \Delta x' + b \Delta y', \\ \Delta^2 z' &= a \Delta^2 x' + b \Delta^2 y',\end{aligned}$$

lesquelles donnent pour a et b ,

$$a = \frac{\Delta z' \Delta^2 y' - \Delta y' \Delta^2 z'}{\Delta x' \Delta^2 y' - \Delta y' \Delta^2 x'}, \quad b = \frac{\Delta x' \Delta^2 z' - \Delta z' \Delta^2 x'}{\Delta x' \Delta^2 y' - \Delta y' \Delta^2 x'}.$$

La substitution de ces valeurs dans l'équation (1) donne :

$$\begin{aligned}(x - x') (\Delta y' \Delta^2 z' - \Delta z' \Delta^2 y') + (y - y') (\Delta z' \Delta^2 x' - \Delta x' \Delta^2 z') + \\ + (z - z') (\Delta x' \Delta^2 y' - \Delta y' \Delta^2 x') = 0.\end{aligned}$$

Telle est l'équation du plan qui passe par trois points de courbe, si l'on passe aux limites de $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, ce plan devient le plan osculateur, dont l'équation est alors :

$$\begin{aligned}(x - x') (dy' d^2 z' - dz' d^2 y') + (y - y') (dz' d^2 x' - dx' d^2 z') + \\ + (z - z') (dx' d^2 y' - dy' d^2 x') = 0.\end{aligned}$$

Si les coordonnées x' , y' , z' sont fonctions d'une variable indépendante t , l'équation du plan osculateur devient :

$$\begin{aligned}(x - x') \left(\frac{dy'}{dt} \frac{d^2 z'}{dt^2} - \frac{dz'}{dt} \frac{d^2 y'}{dt^2} \right) + (y - y') \left(\frac{dz'}{dt} \frac{d^2 x'}{dt^2} - \frac{dx'}{dt} \frac{d^2 z'}{dt^2} \right) + \\ + (z - z') \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d^2 y'}{dt^2} - \frac{dy'}{dt} \frac{d^2 x'}{dt^2} \right) = 0.\end{aligned}$$

IV. CALCUL DU VOLUME D'UN CORPS TERMINÉ PAR DES SURFACES QUELCONQUES. — INTÉGRALE DOUBLE.

Considérons un volume terminé par une surface quelconque, partageons-le en éléments infiniment petits, par une série de plans perpendiculaires à l'un des trois axes coordonnés rectangulaires, l'axe des x par exemple. On peut considérer chaque élément de volume, compris entre deux plans consécutifs, comme étant le volume d'un cylindre droit, ayant pour base l'une des sections et pour hauteur la distance infiniment petite dx qui sépare ces deux plans.

Supposons que l'on puisse obtenir, en fonction de la variable x , l'expression de l'aire de la section faite ainsi dans le volume, par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x ; alors l'expression d'un des petits cylindres représentera la différentielle du volume proposé; en sorte que, si l'on appelle $F(x)$ la fonction qui représente l'aire d'une

section, la différentielle du volume sera donnée par l'expression :

$$F(x) dx.$$

Par suite, si l'on désigne par V la portion du volume du corps, comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x et ayant pour équations :

$$x = x', \quad x = x'',$$

on aura :

$$V = \int_{x'}^{x''} F(x) dx.$$

Donc, pour avoir V , il suffira de connaître $F(x)$.

Si l'on ne peut déterminer directement l'aire $F(x)$, on en déterminera la valeur par une première intégration.

En effet, appelons z et z' les coordonnées comptées suivant l'axe des z et menées par le point le plus haut et par le point le plus bas de la surface dont l'aire inconnue a été désignée par $F(x)$. L'équation de la surface qui termine le volume est de la forme :

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

elle montre que les ordonnées z et z' sont des fonctions de x et de y , car cette équation peut être résolue par rapport à z . Ces fonctions de x et de y peuvent être de nature différente.

Ceci posé, l'aire de la section $F(x)$ correspondante à une certaine valeur de x , aura pour expression :

$$\int (z - z') dy,$$

y étant considérée comme seule variable et x comme constante dans les fonctions z et z' , puisqu'ici on considère une valeur particulière de x .

Si donc l'on intègre la fonction $(z - z') dy$ entre les limites y' et y'' , le résultat de l'intégrale définie :

$$\int_{y'}^{y''} (z - z') dy,$$

sera une fonction de x , nous l'avons appelée $F(x)$ et alors l'inté-

grale $\int_{x'}^{x''} F(x) dx$ nous donnera l'expression V du volume cherché.

Pour obtenir V , il faudra déterminer deux intégrales successives de fonctions d'une seule variable.

Ces deux intégrations successives s'expriment ainsi :

$$\int_{x'}^{x''} dx \int_{y'}^{y''} (x - z') dy.$$

APPLICATION. — *Calcul du volume de l'ellipsoïde.*

L'équation du volume de l'ellipsoïde rapporté à ses trois axes $2a$, $2b$ et $2c$, est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section de ce volume, par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x , et menée au point dont l'abscisse est x , a pour équation :

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

dans cette équation, il faut considérer x comme constante; cette équation montre que cette section est une ellipse dont les demi-axes, placés dans les directions de l'axe des y et de l'axe des z , sont :

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

donc, l'aire de cette section sera (d'après la formule $A = \pi ab$ trouvée page 308, pour l'aire totale de l'ellipse) :

$$\pi ab \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right). \quad \dots \quad (1),$$

si, dans cette formule, on fait varier x , on obtiendra les aires de toutes les sections de l'ellipsoïde par des plans parallèles à l'axe des z perpendiculaires à l'axe des x , et ayant pour abscisses les valeurs de x .

L'expression (1) que nous venons d'obtenir ici, sans intégration, est précisément la fonction $F(x)$ dont nous avons parlé ci-dessus.

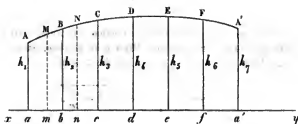
Par conséquent, le volume V de l'ellipsoïde compris entre les plans perpendiculaires à l'axe des x et ayant pour abscisses x' et x'' , sera donné par l'expression :

$$\begin{aligned}
 V &= \int_{x'}^{x''} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \\
 &= \pi bc \int_{x'}^{x''} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi bc \left(x'' - x' + \frac{x'^2}{3a^2} - \frac{x''^2}{3a^2} \right).
 \end{aligned}$$

Si l'on fait $x' = -a$, $x'' = +a$, on a le volume entier de l'ellipsoïde dont l'expression est $\frac{4}{3} \pi abc$.

Si, $a = b = c$, l'ellipsoïde devient la sphère, et l'on trouve $\frac{4}{3} \pi a^3$ pour le volume de la sphère.

V. CALCUL DE L'AIRE D'UNE SURFACE TERMINÉE PAR UNE COURBE NON DÉFINIE.



Proposons-nous de calculer l'aire de la surface $aAA'a'$, comprise entre une courbe non définie AA' , une droite fixe XY et les ordonnées Aa , $A'a'$ des points extrêmes A , A' de la courbe.

Partageons aa' en un nombre pair de parties égales aux points b , c , d , ..., soit n l'une de ces divisions; on devra prendre n assez petit, de telle sorte que, en élevant en b , c , d , etc., les ordonnées bB , cC , etc., les arcs AB , BC , etc., de la courbe compris entre deux ordonnées consécutives puissent, dans la pratique, être considérés comme rectilignes.

Ceci posé, considérons l'aire aAa' composée de deux tranches consécutives; partageons ac ou $2x$, en trois parties égales aux points m et n , alors :

$$am = mn = nc = \frac{2}{3} x,$$

et le point b est le milieu de mn ; enfin élevons en m et en n les ordonnées mM et nN .

Les petits arcs AM MN CN , étant considérés comme rectilignes, la mesure du trapèze, donne :

$$\text{aire } am \text{ } AM = \frac{\alpha}{3} (h_1 + Mm),$$

$$\text{aire } mn \text{ } MN = \frac{\alpha}{3} (Mm + Nn),$$

$$\text{aire } nc \text{ } NC = \frac{\alpha}{3} (Nn + h_3),$$

en ajoutant ces trois équations, il vient :

$$\text{aire } aA \text{ } Cc = \frac{\alpha}{3} [h_1 + 2(Mm + Nn) + h_3],$$

ou bien, puisque le trapèze mn MN donne $Mm + Nn = 2h_2$:

$$\text{aire } aA \text{ } Cc = \frac{\alpha}{3} (h_1 + 4h_2 + h_3). \quad (1).$$

En appliquant cette loi aux surfaces cC Ee et Ee $A'a'$, on a de même :

$$\text{aire } Cc \text{ } Ee = \frac{\alpha}{3} (h_3 + 4h_4 + h_5). \quad (2)$$

$$\text{aire } Ee \text{ } A'a' = \frac{\alpha}{3} (h_5 + 4h_6 + h_7). \quad (3)$$

L'addition des équations (1), (2) et (3), donne finalement :

$$\text{aire } aA \text{ } A'a' = \frac{\alpha}{3} [h_1 + h_7 + 4(h_2 + h_4 + h_6) + 2(h_3 + h_5)].$$

Telle est la formule qui permettra de calculer l'aire aA $A'a'$.

Cette formule montre que, l'expression de l'aire d'une courbe non définie, s'obtient : *en multipliant le tiers de la division α , par la somme des ordonnées extrêmes, augmentée de quatre fois la somme des ordonnées de rang pair, et de deux fois la somme des ordonnées de rang impair.*

FIN.

SEN 610088







